

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1958)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS  
MÉROMORPHES  
**Autor:** Valiron, Georges  
**Kapitel:** V. Exemples de fonctions d'ordre nul.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34634>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Par suite

II. Si l'ordre  $\rho$  est inférieur à  $\frac{1}{2}$ , à  $\varepsilon > 0$  correspond un nombre  $k$  tel que l'inégalité (21) a lieu pour des  $r$  appartenant à une suite d'intervalles  $R_m, kR_m, R_m$  tendant vers l'infini avec  $m$ , ces  $r$  formant des intervalles dont la somme des longueurs entre  $R_m$  et  $kR_m$  est au moins  $L(\varepsilon, \rho) R_m$ . Pour ces  $r$ , on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} > 0, \quad U(r) = r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$  étant un ordre précisé de la fonction considérée<sup>17)</sup>.

En suivant une méthode analogue, on montre que, pour une fonction  $f(z)$ , d'ordre  $\rho < 1$ , il existe des  $r$  aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\log |f(z)| > (\pi\rho \cot(\pi\rho) - \varepsilon) N(r, 0), \quad |z| = r$$

et des  $r$  aussi grands que l'on veut, tels que

$$N(r, 0) > \left( \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} - \varepsilon \right) \log M(r, f),$$

$\varepsilon$  étant donné arbitrairement petit positif, et on a des compléments analogues à l'énoncé II.

## V. EXEMPLES DE FONCTIONS D'ORDRE NUL.

### 27. Fonctions solutions d'équations différentielles.

Wiman a montré que les fonctions entières, ou plus généralement les fonctions de la forme  $y = z^\mu f(z)$ , où  $f(z)$  est une fonction entière, qui vérifient une équation différentielle algébrique du premier ordre,  $\Phi(z, y, y') = 0$  où  $\Phi$  est un polynôme à trois variables, sont nécessairement d'ordre fini positif, d'ordre précisé  $\rho + \frac{a}{\log r}$  et parfaitement régulières par rapport à cet ordre<sup>18)</sup>. Mais il existe des fonctions d'ordre nul vérifiant des équations d'ordre supérieur au premier. Partons de la fonction de Jacobi,

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = A \prod_{0}^{\infty} (1 + z q^{2n+1}) \left( 1 + \frac{q^{2n+1}}{z} \right), \quad |q| < 1,$$

(A est une constante) et posons

$$Z(z) = z \frac{S'(z)}{S(z)}, \quad P(z) = -z Z'(z),$$

nous avons

$$z^2 P'(z)^2 = 4(P + c)^3 - G_2(P + c) - G_3,$$

$c, G_2, G_3$  étant des constantes qui dépendent de  $q$ . Il s'ensuit que  $S(z)$  est solution d'une équation différentielle du troisième ordre, algébrique. Mais, si l'on pose

$$z + \frac{1}{z} = u, \quad S(z) = F(u),$$

$F(u)$  est une fonction entière d'ordre nul,

$$F(u) = C \prod_0^{\infty} \left( 1 + \frac{u q^{2n+1}}{1 + q^{4n+2}} \right) \quad (24)$$

qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. Pour cette fonction  $F(u)$ , on a

$$\log M(r, F) \sim \frac{(\log r)^2}{-4 \log |q|}.$$

On peut déduire de là d'autres fonctions d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques. Tout d'abord en faisant le changement de variables  $u = \theta(z)$  où  $\theta$  est un polynôme; les fonctions obtenues satisferont encore à la condition (22) du n° 21. On obtiendra des fonctions à croissance plus rapide en prenant

$$G(z) = F(F(z)).$$

D'après la condition (24), il existe une courbe fermée  $\Gamma_R$  entourant l'origine sur laquelle

$$\log |F(z)| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log |q|},$$

si grand que soit  $R$  donné, et les valeurs de  $r = |z|$  vérifiant la condition

$$\log r = (1 + o(1)) \log R.$$

La courbe  $\Gamma_R$  étant courbe de module constant de  $F(z)$ , l'argument de  $F(z)$  varie de  $2\pi n_R$ ,  $n_R$  étant le nombre de zéros de  $F(z)$

intérieurs à  $\Gamma_R$ , lorsqu'on fait un tour sur  $\Gamma_R$  dans le sens direct, il existe donc sur  $\Gamma_R$  des points en lesquels l'argument de  $u = F(z)$  est tel que

$$|F(u)| = M(|u|, F), \quad \log |Fu| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log q}.$$

Il s'ensuit que

$$\log M(r, G) \sim \frac{(\log |u|)^2}{-4 \log q} \sim \frac{(\log r)^4}{(-4 \log q)^3}.$$

La fonction  $G$  vérifie une équation différentielle du sixième ordre déduite de celle de  $F = y$ . On a  $\Phi(y, y', y'', y''', z) = 0$ , de

$$G' = y'(F)y', \quad G'' = y''(F)y'^2 + y'(F)y'', \quad G''' = y'''(F)y'^3 + \dots$$

on tire  $y'''(F), y''(F), y'(F)$  et en portant dans  $\Phi(G, y'(F), y''(F), y'''(F), F) = 0$ , on obtient  $\Psi(G, G', G'', G''', F, F', F'', F''') = 0$  avec  $\Phi(F, F', F'', F''', z) = 0$ . On peut éliminer  $F'''$  ce qui donne  $\mu(G, G', G'', G''', F, F', F'', z) = 0$ ; on dérive et on élimine  $F'''$ ; et on recommence deux fois; on a trois équations  $\mu = 0, \nu = 0, \rho = 0$  contenant  $F, F', F''$  qu'on élimine.

On peut évidemment continuer ce procédé.

Existe-t-il des fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques du second ordre ? Il n'en existe pas pour lesquelles

$$\frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}. \quad ^{19)}$$

Mais cette borne est-elle bonne ?

## 28. Fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations fonctionnelles.

Considérons l'équation de Poincaré

$$f(zs) = P_0(z)f(z) + P_1(z), \quad |s| > 1,$$

où  $P_0(z)$  et  $P_1(z)$  sont des polynômes. Elle admet une solution entière sous la seule réserve que le calcul formel des coefficients du développement taylorien soit possible. Si l'on pose  $P_0(z) = c_0 z^q + \dots, |c_0| = C$ , on a

$$M(rS, f) = \left(1 + \frac{O(1)}{r}\right) A r^q M(r, f), \quad S = |z|.$$

En itérant, on obtient

$$\log M(S^n r_0, f) = q \frac{n(n-1)}{2} \log S + n \log (A r_0^q) + O(1);$$

il s'ensuit que

$$\log M(r, f) \sim \frac{q}{2 \log S} (\log r)^2.$$

De même, la méthode des fonctions majorantes montre que l'équation

$$f'(zs) = P(z, f(z)), \quad |s| > 1,$$

admet une solution entière prenant une valeur donnée à l'origine; lorsque le second membre est du premier degré en  $f(z)$ , ces fonctions entières sont d'ordre nul.

Dans d'autres cas, les solutions d'équations fonctionnelles, si elles existent, ne peuvent être que des fonctions d'ordre nul. Par exemple, si l'équation

$$[f'(Q(z))]^m = R(z, f(z))$$

où  $Q(z)$  est un polynôme de degré  $q$  et  $R$  une fraction rationnelle de degré  $p$  par rapport à  $f(z)$ , ne peut avoir de solution méromorphe que si  $p \geq mq$ ; et si une telle solution existe, c'est une fonction méromorphe d'ordre nul (quotient de deux fonctions entières d'ordre nul)<sup>20)</sup>.

Soit encore la fonction entière

$$F(z; a) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^{2n}}\right), \quad |a| > 1,$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z^2) = \left(1 - \frac{z^2}{a}\right) \varphi(z) \varphi(-z),$$

et qui est à croissance très lente. La recherche de la solution méromorphe générale de cette équation fonctionnelle est ramenée à la résolution de

$$\varphi(z^2) = \varphi(z) \varphi(-z).^{21)}$$

(A suivre).