

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1958)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES  
**Autor:** Valiron, Georges  
**Kapitel:** IV. Théorème de Wiman. Extensions et applications.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34634>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES \*

par Georges VALIRON †

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL  
(suite)

## IV. THÉORÈME DE WIMAN. EXTENSIONS ET APPLICATIONS.

### 22. *Théorème de Boutroux-Cartan.*

Ce théorème est relatif au module minimum d'un polynôme à l'extérieur de domaines contenant les zéros. Obtenu par Boutroux dans le cas des polynômes à variable et zéros réels (Thèse, 1903) il a été complété par H. CARTAN (Thèse, 1928).

Etant donné un polynôme canonique  $P(z) = \prod_1^n (z - z_\nu)$ ,  $H$  un nombre positif arbitraire et  $e$  la base des logarithmes, on a

$$|P(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^n$$

pourvu que l'on prenne  $z$  à l'extérieur de  $n$  cercles au plus dont la somme des rayons est au plus  $2H$ .

Il existe un entier  $\lambda_1$  supérieur ou égal à tous les autres, tel qu'il existe un cercle  $C_1$  de rayon  $\lambda_1 \frac{H}{n}$  qui contient exactement  $\lambda_1$  points  $z_\nu$  à son intérieur. En effet, si aucun cercle de rayon  $H$  ne contient tous les zéros, on peut considérer les cercles de rayon  $(n-1) \frac{H}{n}$ , si aucun d'eux ne contient  $n-1$  zéros, on considère les cercles correspondant à  $\lambda_1 = n-2$ , etc. Si l'on arrive à  $\lambda_1 = 1$  sans avoir trouvé  $\lambda_1$ , chacun des cercles de rayon  $\frac{H}{n}$  ayant pour centre les  $z_\nu$  contient un seul zéro, donc  $\lambda_1 = 1$ . Car si l'un de ces cercles de centre  $z_\nu$  contenait  $q > 1$  points  $z_\nu$ , le cercle concentrique de rayon  $q \frac{H}{n}$  en contiendrait  $q' > q$  (sinon on aurait eu  $\lambda_1 = q$ ), le cercle concentrique de

---

\*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

rayon  $q' \frac{H}{n}$  en contiendrait  $q'' > q'$ , etc., ce qui conduirait à une contradiction, il y aurait plus de  $n$  zéros.

Ainsi, il existe un  $\lambda_1$  et un cercle correspondant  $C_1$ . Les points contenus dans  $C_1$  seront les *points de rang*  $\lambda_1$ . Considérons maintenant les  $n - \lambda_1$  autres points. Il existe un plus grand entier  $\lambda_2$  et un cercle  $C_2$  de rayon  $\lambda_2 \frac{H}{n}$  qui contient exactement  $\lambda_2$  de ces points. On a  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ . Sinon,  $C_2$  contiendrait  $\lambda' \geq \lambda_2$  points de l'ensemble total  $z_v$ , un cercle concentrique de rayon  $\lambda'' \frac{H}{n}$  contiendrait  $\lambda'' > \lambda_1$  points de l'ensemble total, contrairement à la définition de  $\lambda_1$ . Les points, autres que ceux de rang  $\lambda_1$  déjà considérés, contenus dans  $C_2$  sont les *points de rang*  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 \leq \lambda_1$ ). Ne considérant plus que les  $n - \lambda_1 - \lambda_2$  autres points, on définit les *points de rang*  $\lambda_3$ , ( $\lambda_3 \leq \lambda_2$ ), qui sont contenus dans un cercle  $C_3$  de rayon  $\lambda_3 \frac{H}{n}$ . Et ainsi de suite. La somme des rayons des cercles  $C_1, C_2, \dots, C_p$  ainsi obtenus est

$$\frac{H}{n} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p) = H.$$

Tout cercle  $S$  de rayon  $\lambda \frac{H}{n}$ , où  $\lambda$  est entier, qui contient au moins  $\lambda$  points  $z_v$ , en contient un au moins de rang supérieur ou égal à  $\lambda$ ; c'est une conséquence immédiate de la définition du rang.

Marquons alors les cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$  respectivement concentriques à  $C_1, C_2, \dots, C_p$  et de rayons respectivement doubles et prenons  $z$  à l'extérieur de ces cercles  $\Gamma$ . Un cercle  $S$  de centre  $z$  et rayon  $\lambda \frac{H}{n}$ , où  $\lambda$  est entier, contient au plus  $\lambda - 1$  points  $z_v$ . En effet, si  $z_v$  est intérieur à  $S$  et si  $\lambda_j$  est son rang et  $a_j$  le centre du cercle  $C_j$  correspondant, on a

$$2 \lambda_j \frac{H}{n} \leq |z - a_j| < \lambda_j \frac{H}{n} + \lambda \frac{H}{n}$$

donc  $\lambda_j < \lambda$ ;  $S$  contient  $\lambda - 1$  points  $z_v$  au plus. Rangeons les  $z_v$  dans l'ordre des distances non décroissantes à  $z$ , la distance du  $q^{\text{ième}}$  point à  $z$  sera au moins  $q \frac{H}{n}$ , on aura

$$|P(z)| \geq \left(\frac{H}{n}\right)^n n! \geq \left(\frac{H}{n}\right)^n$$

ce qui démontre le théorème puisque la somme des rayons des cercles  $\Gamma$  est  $2H$  <sup>13)</sup>.

23. *Etude du module d'une fonction d'ordre nul à l'extérieur de certains cercles.*

Une fonction d'ordre nul, égale à 1 pour  $z = 0$ , est de la forme

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right), \quad \sum \frac{1}{|\alpha_n|} \text{ convergent.}$$

Donnons-nous une fonction  $\beta(x)$  telle que lorsque  $x$  (réel) tend vers l'infini,

$$\beta(x) \downarrow 0, \quad x\beta(x) > 1,$$

et considérons la suite de cercles de centre  $z = 0$  et rayons

$$R_1, \quad R_2 = (1 + \beta(R_1)) R_1, \dots, \quad R_{m+1} = (1 + \beta(R_m)) R_m.$$

D'après la seconde hypothèse sur  $\beta$ ,  $R_m$  croît indéfiniment avec  $m$ . Appelons  $D_m$  la couronne  $R_m \leq |z| \leq R_{m+1}$  et  $D'_m$  la couronne définie par

$$R'_m < |z| < R''_m, \quad R'_m = R_m(1 - \beta(R_m)), \quad R''_m = R_m(1 + 2\beta(R_m)).$$

Désignons par  $m'$  et  $m''$  les nombres  $n(r)$  de zéros de  $f(z)$  pour  $r = R'_m$  et  $r = R''_m$  respectivement et appliquons au polynôme

$$g_m(z) = \prod_{m'+1}^{m''} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) = \prod_{m'+1}^{m''} \frac{(\alpha_n - z)}{\alpha_n}$$

le théorème de Boutroux-Cartan. Nous aurons

$$|g_m(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^{m''-m'} \left(\frac{1}{R''_m}\right)^{m''-m'} \quad (1)$$

pourvu que  $z$  soit extérieur à  $m'' - m'$  cercles dont la somme des rayons est au plus  $2H$ . Nous prendrons

$$H = R'_m \beta(R_m)^2,$$

l'inégalité (1) aura lieu dans toute la couronne  $D_m$  sauf au plus dans  $m'' - m'$  cercles dont la somme des rayons est au plus

égale à

$$2 R_m \beta (R_m)^2, \quad (2)$$

ces cercles pouvant couper les cercles limitant la couronne. Appelons  $\Delta_m$  la portion de  $D_m$  extérieure à ces cercles. Dans  $\Delta_m$ , on a d'après (1)

$$\log |g_m(z)| > -2 m'' \log \frac{2}{\beta (R_m)} > \frac{-4 m''}{\beta (R_m)}, \quad (3)$$

dès que  $m$  est assez grand.

On a, dans  $D_m$ ,

$$f(z) = \prod_1^{m'} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \prod_{m''+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \cdot g_m(z). \quad (4)$$

Dans le second produit  $|\alpha_n| > R_m (1 + 2\beta) > r \frac{1 + 2\beta}{1 + \beta}$  en posant pour simplifier  $\beta = \beta(R_m)$ , et  $|z| = r$ , donc

$$\log \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \geq \log \left(1 - \frac{r}{|\alpha_n|}\right) > -\frac{r}{|\alpha_n|} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_n| - r} > -\frac{r}{|\alpha_n|} \frac{1 + 2\beta}{\beta}.$$

Le logarithme du module du second produit dans (4) est donc supérieur à

$$-\frac{3}{\beta} \sum_{m''+1}^{\infty} \frac{r}{|\alpha_n|} > -\frac{3r}{\beta} \sum_{m''+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|} > -\frac{3r}{\beta} \int_r^{\infty} \frac{n(x) dx}{x^2}, \quad (5)$$

pourvu que  $m$  soit assez grand.

On a d'ailleurs, si  $m$  est assez grand,

$$\int_r^{\infty} \frac{n(x) dx}{x^2} > \int_{R_m''}^{\infty} \frac{n(x) dx}{x^2} > \frac{m''}{R_m''} > \frac{m''}{3r}. \quad (6)$$

Le premier facteur de (4) peut s'écrire

$$\frac{z^{m'}}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{m'}} \prod_1^{m'} \left(\frac{\alpha_n}{z} - 1\right),$$

ou encore

$$\frac{z^n}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_n} \frac{\alpha_{m'+1} \dots \alpha_n}{z^{n-m'}} \prod_1^{m'} \left(\frac{\alpha_n}{z} - 1\right), \quad n = n(r). \quad (7)$$

Dans cette expression, le logarithme du module du premier facteur est

$$\int_0^r \frac{n(x) dx}{x}; \tag{8}$$

dans le second facteur, les  $|\alpha_j|$  sont supérieurs ou égaux à  $R'_m$  et  $|z|$  moindre que  $R_{m+1}$ , le logarithme du module de ce facteur est supérieur à

$$-n \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} > -2n \geq -2m''$$

si  $m$  est assez grand. Enfin, le troisième facteur dans (7) dans lequel  $|\alpha_n - z| \geq r - |\alpha_n| \geq r - r(1 - \beta) = r\beta$  a son logarithme supérieur à

$$-m' \log \frac{1}{\beta} > -\frac{m''}{\beta}.$$

Le module du premier facteur de (4) est donc supérieur à l'expression (8) diminuée de  $-m'' \frac{2}{\beta}$ . En tenant compte de ce résultat et des inégalités (3), (5) et (6) on obtient, dans  $\Delta_m$ , l'inégalité

$$\log |f(z)| > \int_0^r \frac{n(x) dx}{x} - \frac{2r}{\beta(R_m)} \int_r^\infty \frac{n(x) dx}{x^2}$$

qui, rapprochée de l'égalité (21) du n° 21, montre que:

*Pour toute fonction d'ordre nul  $f(z)$  (même si  $f(0) = 0$ ), on a, à l'extérieur des régions circulaires contenant les zéros,*

$$\log |f(z)| = \int_0^r \frac{n(x) dx}{x} + O(\log r) + \theta' r \int_r^\infty \frac{n(x) dx}{x^2}, \quad -\frac{K}{\beta(r)} < \theta' < 1, \tag{9}$$

*K étant une constante numérique et  $\beta(r)$  tendant vers zéro lorsque  $r \rightarrow \infty$ . La fonction  $\beta(r)$  peut être choisie arbitrairement telle que  $\beta(r) \downarrow 0$ ,  $r\beta(r) > 1$  et les régions circulaires exclues dans la couronne  $r(1 - \beta(r)) < |z| < r(1 + \beta(r))$  sont constituées par moins de  $n[r(1 + \beta(r))]$  cercles dont la somme des rayons est moindre que  $r\beta(r)^2 K'$ ,  $K'$  étant une constante numérique.*

Pour toute fonction vérifiant la condition (28) du n° 21, on pourra prendre pour  $\beta(r)$  la racine carrée du rapport figurant dans (28) ou plus exactement le maximum de cette racine carrée entre  $r$  et  $\infty$ . Dans les régions restantes, on aura

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(z)|}{N(r, 0)} = 1. \quad (10)$$

24. *Conséquences de l'étude précédente. Théorème de Littlewood et fonctions de la classe normale. Fonctions de la classe W.*

Si  $f(z)$  est une fonction d'ordre nul quelconque, nous avons vu que l'on a l'égalité (27). Comme la fonction

$$\int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2} dx$$

décroit lorsque  $r$  croît, tandis que  $N(r, 0)$  croît, on déduit de (27) qu'il existe une suite de couronnes  $R < |z| < kR$ ,  $k > 1$  dans lesquelles le rapport de

$$r \int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2} dx, \quad |z| = r,$$

à  $N(r)$  tend vers zéro lorsque  $R \rightarrow \infty$ . On pourra prendre pour  $\beta(r)$  la racine carrée de ce rapport et dans la portion de la couronne extérieure aux cercles d'exclusion, on aura l'égalité (10). Comme la somme des rayons des cercles exclus dans une couronne d'épaisseur relative  $2\beta(r)$  est  $Kr\beta(r)^2$ , il existera des circonférences  $|z| = r$  appartenant à la région non exclue, ce qui donne le théorème de Littlewood:

I. *Pour toute fonction d'ordre nul, existe une suite de circonférences  $|z| = r$ , de rayons indéfiniment croissants, sur lesquelles  $\log |f(z)| \sim \log M(r, f)$ .*

Nous appellerons *fonction d'ordre nul de la classe normale*, toute fonction  $f(z)$  pour laquelle l'égalité (28) du n° 21 est vérifiée. Le théorème du n° 23 s'applique quel que soit  $r$  en choisissant  $\beta(r)$  comme il a été dit à la fin du n° 23. Dans la couronne  $r(1 - \beta(r)) < r = |z| < r(1 + \beta(r))$ , les régions exclues

appartiennent à un nombre fini de couronnes dont la somme des épaisseurs est  $Kr\beta(r)^2$ , infiniment petite par rapport à l'épaisseur totale  $2r\beta(r)$ . Si deux cercles d'exclusion se coupent, on peut les remplacer par un seul, ce qui n'augmente pas la somme des rayons. On peut donc supposer ces cercles extérieurs les uns aux autres. Chaque cercle d'exclusion est vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre du cercle tend vers l'infini; il contient au moins un zéro. Ainsi, compte tenu de l'égalité (26) du n° 21 :

II. *Pour une fonction entière d'ordre nul de la classe normale, on a*

$$\log |f(z)| \sim \log M(r, f), \quad |z| = r, \quad (11)$$

*à la condition d'exclure des cercles contenant les zéros, extérieurs les uns aux autres, la somme des rayons des cercles exclus dont le centre est à une distance de l'origine comprise entre  $R$  et  $2R$  étant  $o(R)$ . En conséquence, les cercles exclus sont vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre s'éloigne indéfiniment.*

D'après l'égalité (10), les régions du plan où  $|f(z)| < A$ ,  $A$  étant fixe et arbitrairement grand, sont intérieures aux cercles d'exclusion dès que  $|z|$  est assez grand, les zéros de  $f(z) - Z$ ,  $|Z| < A$  sont intérieurs à ces mêmes régions. On peut d'ailleurs supposer que  $A$  augmente indéfiniment, il suffit que  $\log |Z| \leq \mu \left( \log M\left(\frac{r}{2}, f\right) \right)$ ,  $\mu < 1$ , pour que les zéros de  $f(z) - Z$  soient dans les régions exclues. Les cercles exclus sont donc des cercles de remplissage d'après la terminologie de Milloux et le théorème II contient et précise, pour la classe de fonctions considérée le théorème de Julia<sup>14)</sup>. On a pour ces fonctions des renseignements précis sur la position des points où  $f(z)$  prend une valeur arbitraire  $Z$  et sur leurs déplacements lorsque  $Z$  varie.

Considérons maintenant un nombre fixe  $A$ . Dès que  $r$  est assez grand pour que  $\log A = \mu \left( \log M\left(\frac{r}{2}, f\right) \right)$ ,  $\mu < 1$ , les domaines en lesquels

$$|Z = f(z)| < A$$

sont intérieurs aux cercles de remplissage ainsi que leurs fron-



tières. Un tel domaine  $\Delta$  est simplement connexe et sur sa frontière  $|f(z)| = A$ . Lorsque  $z$  varie dans  $\Delta$ , le point  $Z = f(z)$  décrit un domaine du plan des  $Z$  limité par la circonférence  $|Z| = A$ . Pour tous les  $Z$  tels que  $|Z| < A$ , l'équation  $f(z) = Z$  a le même nombre de solutions égal au nombre des zéros de  $f(z)$  situés dans  $\Delta$  (on le voit par le théorème de Rouché), si  $\nu$  est le nombre de ces solutions, la fonction inverse  $z = f_{-1}(Z)$  de  $Z = f(z)$  est une fonction à  $\nu$  branches dont les points critiques correspondent aux zéros de  $f'(z)$ . Autrement dit, la surface de Riemann décrite par  $Z = f(z)$ , lorsque  $z$  décrit  $\Delta$ , a  $\nu$  feuillets, c'est un cercle à  $\nu$  feuillets. On peut rendre les branches de  $f_{-1}(Z)$  uniformes en empêchant les rotations autour des points critiques  $Z^j = f(z^j)$ ,  $f'(z_j) = 0$ . A cet effet, on peut joindre les points  $Z^j$  à la circonférence  $|Z| = A$  en suivant le rayon  $\arg Z = \arg Z^j$ ,  $|Z| \geq |Z^j|$  lorsque  $Z^j \neq 0$ , et un rayon arbitraire distinct des précédents si  $Z^j = 0$ . On forme ainsi, dans le plan simple des  $Z$ , un domaine simplement connexe  $D_A$  que les  $\nu$  branches de  $z = f_{-1}(Z)$  rendues holomorphes, et qui sont univalentes, représentent sur  $\nu$  domaines  $\Delta_j$  sans points communs qui constituent avec leurs frontières le domaine  $\Delta$ . Un arc de frontière d'un  $\Delta_j$  qui n'est frontière que de  $\Delta_j$  peut être supprimé sans que  $\Delta_j$  cesse d'être simplement connexe; dans ces domaines  $\Delta_j$ ,  $f(z)$  est univalente; les frontières de  $\Delta_j$  qui ne sont pas arcs de frontière de  $\Delta$  fournissent les lignes le long desquelles on passe d'un feuillet de la surface de Riemann à un autre feuillet. Le nombre total des points critiques sur la surface de Riemann, comptés avec leur ordre de multiplicité est égal au nombre des racines de  $f'(z) = 0$  appartenant à  $\Delta$ ; on supposera, en remplaçant s'il y a lieu  $A$  par un nombre voisin, qu'il n'y a pas de zéro de  $f'(z)$  sur la ligne  $|f(z)| = A$  frontière de  $\Delta$ . D'après un théorème connu <sup>15)</sup> que nous admettrons, le nombre des zéros de  $f'(z)$  appartenant à  $\Delta$  est  $\nu - 1$ . On a ainsi  $\nu - 1$  points critiques et  $\nu$  feuillets. Comme à un point critique d'ordre  $q$  correspondent  $q + 1$  lignes de passage d'un feuillet à un autre, tracées sur les divers feuillets, le nombre total des lignes de passage est  $\Sigma(q + 1)$  avec  $\Sigma q = \nu - 1$ , et comme  $q + 1 \leq 2q$ , on a  $\Sigma(q + 1) \leq 2\nu - 2$ . Comme il y a  $\nu$  feuillets, l'un au moins ne contient qu'une ligne de passage. Autrement dit, dans

$\Delta$  existe au moins un domaine  $\Delta_j$  dans lequel  $Z = f(z)$  est univalente et représente  $\Delta_j$  sur le cercle  $|Z| < A$  privé au plus d'un segment porté par un rayon. Ainsi

III. *Pour une fonction d'ordre nul de la classe normale, chaque domaine  $\Delta$  d'exclusion du théorème II contient au moins un domaine  $\Delta'$  dans lequel  $Z = f(z)$  est univalente et représente ce domaine sur un cercle  $|Z| < A$  privé au plus d'un rayon ou d'un segment de rayon,  $A$  croissant indéfiniment lorsque le domaine s'éloigne indéfiniment. Le domaine  $\Delta'$  appartient à un cercle qui est vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque  $\Delta'$  s'éloigne indéfiniment.*

La nécessité de supprimer un rayon ou un segment de rayon s'impose puisque  $f(z)$  peut n'avoir que des zéros multiples.

La propriété des domaines  $\Delta'$  s'étend à toute fonction entière  $f(z)$  pour laquelle existe une suite de courbes fermées simples  $\Gamma_n$  entourant l'origine telles que le minimum du module de  $f(z)$  sur  $\Gamma_n$  tende vers l'infini lorsque  $n$  croît indéfiniment, à condition de supprimer la condition relative aux dimensions de  $\Delta'$ . En effet, pour une telle fonction, les domaines dans lesquels  $|f(z)| < A$  seront des domaines  $\Delta$  simplement connexes bornés puisqu'ils ne coupent pas les courbes  $\Gamma_n$  dès que  $n$  est assez grand. Ces domaines existent. Car on peut tout d'abord, en supprimant des  $\Gamma_n$ , faire en sorte que  $\Gamma_{n+1}$  contienne  $\Gamma_n$  à son intérieur; si  $f(z)$  ne s'annule pas entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  le théorème sur le maximum du module montre que  $|f(z)|$  est supérieur entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  à son minimum sur ces courbes. Il s'ensuit que  $f(z)$  s'annule entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  pour une suite infinie de valeurs de  $n$ ; sinon  $|f(z)|$  serait supérieur à tout nombre donné dès que  $|z|$  serait assez grand,  $\frac{1}{f(z)}$  serait holomorphe à l'infini et nulle en ce point,  $f(z)$  serait un polynôme. Si  $f(z)$  s'annule entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$ , il existe entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  un domaine  $\Delta$  dans lequel  $|f(z)| < A$ ; ce domaine est simplement connexe puisque  $C$  étant une courbe fermée intérieure à  $\Delta$ , on a sur  $C$ , donc à son intérieur,  $|f(z)| < A$ , l'intérieur de  $C$  appartient à  $\Delta$  (en particulier,  $\Delta$  n'entoure pas l'origine, la portion de plan extérieure à  $\Delta$  comprise entre  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{n+1}$  reste connexe). On peut appliquer à  $\Delta$  les raisonnements précédents. Par suite, si l'on convient

d'appeler *fonctions de la classe W* (Wiman) les fonctions entières jouissant de la propriété en question, on voit que:

IV. *Pour toute fonction entière  $f(z)$  de la classe W, il existe une suite infinie de domaines  $\Delta'$  bornés simplement connexes tels que, dans chaque  $\Delta'$ ,  $f(z)$  est univalente et prend toutes les valeurs  $Z$  appartenant au cercle  $|Z| < A$  privé au plus d'un rayon ou d'un segment de rayon,  $A$  croissant indéfiniment lorsque  $\Delta'$  s'éloigne indéfiniment.*

*Une fonction  $f(z)$  est de la classe W s'il existe une suite infinie de courbes fermées simples  $\Gamma_n$  entourant l'origine telles que le minimum du module de  $f(z)$  sur  $\Gamma_n$  tende vers l'infini avec  $n$ .*

*D'après le théorème de Littlewood, toute fonction d'ordre nul est de la classe W.*

Ce dernier résultat est contenu dans un théorème antérieur de Wiman.

## 25. *Fonctions d'ordre nul n'appartenant pas à la classe normale.*

Il existe des fonctions n'appartenant pas à la classe normale pour lesquelles la proposition II n'est plus vraie, c'est-à-dire pour lesquelles  $|f(z)|$  reste borné dans des domaines circulaires qui sont vus de l'origine sous un angle fini. On peut construire de telles fonctions de la forme

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha(n)}\right)^{q(n)}$$

où les  $\alpha(n)$  sont positifs et les  $q(n)$  entiers. On suppose réalisées les conditions suivantes:

$$\sum_1^m q(n) = (1 + o(1)) q(m), \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q(n)}{\log \alpha(n)} = 0, \quad (12)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) \sum_{m+1}^{\infty} \frac{q(n)}{\alpha(n)} = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q(m-1) \log \alpha(m)}{q(m)} = 0. \quad (14)$$

La condition (12), compte tenu de (11), montre que l'ordre est nul. En écrivant  $f(z)$  sous la forme

$$f(z) = \prod_1^{m-1} \left( \frac{z}{\alpha(n)} \right)^{q(n)} \prod_1^{m-1} \left( 1 - \frac{\alpha(n)}{z} \right)^{q(n)} \left( \frac{\alpha(m) - z}{\alpha(m)} \right)^{q(m)} \prod_{m+1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\alpha(n)} \right)^{q(n)}, \quad (15)$$

et en supposant

$$\frac{\alpha(m)}{A} < |z| < 3\alpha(m) \quad (16)$$

où  $A$  est fixe et grand, on a les résultats suivants: Le quatrième facteur dans (15) est égal à  $1 + o(1)$  en vertu de (13) qui implique que  $\alpha(m)/\alpha(m+1)$  tend vers zéro; il en est de même du second en vertu de (11) et (13). Le premier facteur a un module supérieur à 1, mais moindre que

$$(3\alpha(m))^{q(m-1)(1+o(1))}$$

donc égal à  $e^{o(1)q(m)}$  d'après (14). Le troisième facteur est de module moindre que  $4^{q(m)}$ ; si  $|z - \alpha(m)| > k\alpha(m)$ ,  $k > 1$ , le module de ce troisième facteur est supérieur à  $k^{q(m)}$  tandis que lorsque  $|z - \alpha(m)| < k'\alpha(m)$ ,  $k' < 1$ , il est inférieur à  $k'^{q(m)}$ . Par suite:

*La fonction  $f(z)$  a son module très petit dans la suite des cercles*

$$|z - \alpha(m)| < k'\alpha(m), \quad k' < 1$$

*mais elle est très grande dans la portion des couronnes (16) qui sont extérieures respectivement aux cercles*

$$|z - \alpha(m)| > k\alpha(m), \quad k > 1.$$

Dans les portions restantes des couronnes (16),  $f(z)$  prend les valeurs  $Z$  différentes de zéro; les zéros de  $f(z) - Z$  étant approximativement les sommets d'un polygone régulier de  $q(m)$  côtés et centre  $\alpha(m)$ . Lorsque  $m \rightarrow \infty$ , on peut faire tendre  $k$  et  $k'$  vers 1 et l'on obtient des domaines d'univalence de  $Z = f(z)$  que l'on peut enfermer dans des cercles vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque  $m \rightarrow \infty$ , dans chacun desquels  $f(z)$  prend des valeurs  $Z$  appartenant à la couronne  $\frac{1}{B_m} < |Z| < B_m$  fendue le long d'un rayon,  $B_m$  étant indéfini-

ment croissant avec  $m$ . On a donc des domaines d'univalence dont les dimensions sont analogues à celles obtenues pour les fonctions de la classe normale, mais où se présente une valeur exceptionnelle,  $Z = 0$ .

On peut prendre, par exemple

$$q(n) = 2^{2^{n+2}}, \quad \log \alpha(n) = 2^{2^n} \quad {}^{16)}$$

Peut-on former des fonctions anormales analogues dès que la condition (22) du n° 21 n'est pas vérifiée, c'est-à-dire dès que  $\log M(r, f) = (\log r)^2 \lambda(r)$ ,  $\lambda(r)$  étant à croissance aussi lente que l'on veut ? Peut-on avoir plusieurs valeurs exceptionnelles ? Ou bien, est-il vrai que, tout au moins pour les fonctions d'ordre nul, le théorème IV du n° 24 est vrai avec des domaines  $\Delta'$  enfermables dans des cercles vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque  $\Delta'$  s'éloigne indéfiniment, à condition d'exclure de  $|Z| < A$  non plus seulement un segment de rayon, mais un petit cercle  $|Z - Z_{\Delta'}| < \frac{1}{A}$  et le segment de rayon de  $|Z| < A$  joignant  $Z_{\Delta'}$  à  $|Z| = A$  ?

## 26. *Théorème de Wiman.*

Wiman a montré que  $f(z)$  étant une fonction entière d'ordre  $\rho$  inférieur à  $\frac{1}{2}$  et  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, il existe une suite de circonférences  $|z| = r$  de rayons indéfiniment croissants sur lesquelles on a

$$\log |f(z)| > r^{\rho-\varepsilon}.$$

Cette inégalité a été précisée par Littlewood, puis par Valiron et Wiman, et a été étendue par R. Nevanlinna; des démonstrations nouvelles ont été données par Pólya, Denjoy, ... Si l'on considère une fonction entière d'ordre inférieur à 1, égale à 1 à l'origine (hypothèse qui ne diminuera pas la généralité des résultats), on augmente le maximum de son module pour  $|z| = r$  et on diminue le minimum du module pour  $|z| = r$  en alignant les zéros sur une demi-droite sans changer leurs modules. Une inégalité de la forme  $\log |f(r)| > k \log |f(-r)|$ ,  $k > 0$  démontrée pour une fonction à zéros tous positifs entraîne

pour les fonctions dont les zéros ont les mêmes modules

$$\log |f(z)| > k \log M(r, f), \quad |z| = r.$$

Considérons (Pólya, Denjoy), la fonction

$$\theta(x) = \log |1 - x| - \cos(\pi\alpha) \log(1 + x), \quad x \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

et l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_x^\infty \frac{\theta(x)}{x^{1+\alpha}} dx.$$

Comme on a

$$\int_0^\infty \log |1 - x| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha} \cot(\pi\alpha), \quad \int_0^\infty \frac{\log(1 + x)}{x^{1+\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi\alpha)},$$

on voit que

$$\Omega(0) = 0, \quad \Omega(\infty) = 0.$$

D'autre part  $\Omega'(x)$  a le signe de  $-\theta(x)$ , qui est positif jusqu'à une valeur  $x_0$  puis négatif; donc  $\Omega(x)$  croît, puis décroît; on a  $\Omega(x) > 0$  pour  $0 < x < \infty$ . La fonction positive continue

$$\lambda(x) = \frac{x^\alpha \Omega(x)}{\log(1 + x)}$$

pour laquelle

$$\lim_{x=0} \lambda(x) = \frac{1 + \cos \pi\alpha}{1 - \alpha}, \quad \lim_{x=\infty} \lambda(x) = \frac{1 - \cos(\pi\alpha)}{\alpha},$$

a un minimum positif  $h(\alpha)$ . On a, en conséquence,

$$r^\alpha \int_r^\infty (\log |1 - x| - \cos(\pi\alpha) \log(1 + x)) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \geq h(\alpha) \log(1 + r).$$

On en déduit, si  $r_n > 0$ , en posant  $t = r_n x$ ,  $R = r r_n$ ,

$$R^\alpha \int_{R_n}^\infty \left[ \log \left| 1 - \frac{t}{r_n} \right| - \cos(\pi\alpha) \log \left( 1 + \frac{t}{r_n} \right) \right] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geq h(\alpha) \log \left( 1 + \frac{R}{r_n} \right) \quad (17)$$

Considérons alors la fonction d'ordre  $\rho$  inférieur à 1, à zéros positifs  $r_n$ ,

$$f(z) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right)$$

et supposons que,  $\alpha$  étant pris supérieur ou égal à  $\rho$ , l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\log M(t, f)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad M(t, f) = f(-t), \quad (18)$$

soit convergente. Dans ces conditions, on peut additionner les inégalités (17) pour  $n = 1, 2, \dots$  car

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_1^{\infty} \left| \log \left| 1 - \frac{t}{r_n} \right| \right| \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \quad (19)$$

converge, ce que nous démontrerons ci-dessous. On obtient

$$\mathbb{R}^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} [\log |f(t)| - \cos(\pi\alpha) \log |f(-t)|] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geq h(\alpha) \log M(\mathbb{R}, f). \quad (20)$$

Cette inégalité exige tout d'abord que l'on ait

$$\overline{\lim}_{r=\infty} [\log |f(r)| - \cos(\pi\alpha) \log M(r, f)] = \infty,$$

sans quoi le premier membre de (20) serait borné alors que le second membre ne l'est pas. Ceci s'applique à une fonction d'ordre  $\rho < 1$  en prenant  $\alpha$  entre  $\rho$  et 1 et à une fonction d'ordre  $\rho$  et de la classe convergente en prenant  $\alpha = \rho$ . Par conséquent, en utilisant les remarques faites au début,

I. *Pour toute fonction d'ordre  $\rho$  inférieur à  $\frac{1}{2}$  et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe une suite de circonférences  $|z| = r$ , de rayons indéfiniment croissants, sur lesquelles*

$$\log |f(z)| > [\cos(\pi\rho) - \varepsilon] \log M(r, f). \quad (21)$$

*Pour une fonction d'ordre  $\rho \leq \frac{1}{2}$  et de la classe convergente, il*

existe une suite de circonférences de rayons indéfiniment croissants sur lesquelles

$$\log |f(z)| > \cos(\pi \rho) \log M(r, f) + \omega(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \omega(r) = \infty.$$

En particulier, les fonctions d'ordre inférieur à  $\frac{1}{2}$ , ou d'ordre  $\frac{1}{2}$  et de la classe convergente appartiennent à la classe W.

Il reste à prouver que la convergence de (18), qui entraîne, on l'a vu, la convergence de

$$J = \int_1^{\infty} \frac{n(x) dx}{x^{1+\alpha}}, \tag{22}$$

entraîne aussi la convergence de (19). Or

$$\log \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| < \log \left( 1 + \frac{r}{r_n} \right),$$

et

$$-\log \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| = -\log \left( 1 + \frac{r}{r_n} \right) + \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right|.$$

Comme (18) converge, il reste à montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_1^{\infty} \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right| \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \tag{23}$$

converge. Si  $r_n > 2r$

$$\log \frac{r + r_n}{r_n - r} = \log \left( 1 + \frac{2r}{r_n - r} \right) < \log \left( 1 + \frac{4r}{r_n} \right),$$

et puisque (18) converge, on peut remplacer dans (23) la série par la somme pour  $r_n \leq 2r$ . L'intégrale (23) ainsi modifiée est alors inférieure à

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^{q\alpha}} \int_{2^q}^{2^{q+1}} \sum_{r_n < 2r} \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right| \frac{dr}{r} < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{n(2^{q+2})}{2^{q\alpha}} C < 2^{1+3\alpha} C J,$$



où  $C$  est le maximum de

$$\int_1^2 \log \left| \frac{u + \lambda}{u - \lambda} \right| du, \quad \lambda > 0.$$

La proposition I est ainsi complètement démontrée. On peut la compléter en utilisant d'une façon plus précise l'inégalité (20). Supposons  $\rho < \frac{1}{2}$  et soit  $\rho(r)$  un ordre précisé de  $f(z)$ . Si  $\frac{1}{2} > \alpha > \rho$  et  $k > 1$ , on a

$$\log |f(t)| < \log |f(-t)| = \log M(t, f) < (1 + o(1)) U(t), \quad U(t) = t^{\rho(t)},$$

le premier membre de (20) dans lequel on prend  $kR$  pour limite inférieure de l'intégrale est inférieur à

$$R^\alpha (1 + o(1)) (1 - \cos(\pi\alpha)) \int_{kR}^{\infty} t^{\rho(t)-1-\alpha} dt = (1 + o(1)) (1 - \cos(\pi\alpha)) \frac{U(R)}{(\alpha - \rho) k^{\alpha-1}}$$

On pourra prendre  $k$  assez grand pour que le dernier membre soit inférieur à  $\frac{1}{3} U(R) h(\alpha)$ . Il s'ensuit que, pour les valeurs de  $R$  pour lesquelles

$$\log M(R, f) \sim U(R),$$

on aura

$$R^\alpha \int_R^{kR} [\log |f(t)| - \cos(\pi\alpha) \log M(t, f)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} > \frac{1}{2} h(\alpha) U(R)$$

dès que  $R$  sera assez grand. Si  $L$  est la longueur des intervalles dans lesquels le crochet figurant dans cette intégrale est positif, la valeur du premier membre est au plus égale à

$$(1 + o(1)) (1 - \cos(\pi\alpha)) U(R) \frac{L}{R},$$

on a donc

$$L > R (1 - o(1)) \frac{h(\alpha)}{2 - 2 \cos(\pi\alpha)}.$$

Par suite

II. Si l'ordre  $\rho$  est inférieur à  $\frac{1}{2}$ , à  $\varepsilon > 0$  correspond un nombre  $k$  tel que l'inégalité (21) a lieu pour des  $r$  appartenant à une suite d'intervalles  $R_m, kR_m, R_m$  tendant vers l'infini avec  $m$ , ces  $r$  formant des intervalles dont la somme des longueurs entre  $R_m$  et  $kR_m$  est au moins  $L(\varepsilon, \rho) R_m$ . Pour ces  $r$ , on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} > 0, \quad U(r) = r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$  étant un ordre précisé de la fonction considérée <sup>17)</sup>.

En suivant une méthode analogue, on montre que, pour une fonction  $f(z)$ , d'ordre  $\rho < 1$ , il existe des  $r$  aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\log |f(z)| > (\pi\rho \cot(\pi\rho) - \varepsilon) N(r, 0), \quad |z| = r$$

et des  $r$  aussi grands que l'on veut, tels que

$$N(r, 0) > \left( \frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} - \varepsilon \right) \log M(r, f),$$

$\varepsilon$  étant donné arbitrairement petit positif, et on a des compléments analogues à l'énoncé II.

## V. EXEMPLES DE FONCTIONS D'ORDRE NUL.

### 27. Fonctions solutions d'équations différentielles.

Wiman a montré que les fonctions entières, ou plus généralement les fonctions de la forme  $y = z^\mu f(z)$ , où  $f(z)$  est une fonction entière, qui vérifient une équation différentielle algébrique du premier ordre,  $\Phi(z, y, y') = 0$  où  $\Phi$  est un polynôme à trois variables, sont nécessairement d'ordre fini positif, d'ordre précisé  $\rho + \frac{a}{\log r}$  et parfaitement régulières par rapport à cet ordre <sup>18)</sup>. Mais il existe des fonctions d'ordre nul vérifiant des équations d'ordre supérieur au premier. Partons de la fonction de Jacobi,

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = A \prod_0^{\infty} (1 + z q^{2n+1}) \left( 1 + \frac{q^{2n+1}}{z} \right), \quad |q| < 1,$$