Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

Kapitel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34633

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES *

par Georges VALIRON †

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL

(suite)

II. L'ORDRE ET LES COEFFICIENTS TAYLORIENS.

11. *Le terme maximum de la série de Taylor et le polygone d'Hadamard.*

Si $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ est une fonction entière, $A_n = |a_n|$ et $|z| = r$, la série étant convergente, absolument convergente quel que soit z, la suite des nombres

$$A_0\,,\quad A_1 r\,,\quad \ldots\,,\quad A_n r^n\,,\quad \ldots \tag{1}$$

tend vers zéro pour chaque valeur de r. Pour chaque r, il y a donc un terme supérieur ou égal à tous les autres. Ce terme (ou l'un de ces termes) est le *terme maximum pour cette valeur* r, ou simplement le *terme maximum*; sa valeur est une fonction de r que nous désignerons par B (r). Si r est remplacé par un nombre plus grand, chaque terme de la suite (1) augmente (sauf A_0), B (r) est donc une fonction croissante de r, et puisque chaque terme de (1) est continu, B (r) est une fonction croissante continue, qui croît indéfiniment avec r. *Le rang* n *du terme maximum de (1)*, ou plus exactement de celui des termes maxima dont le rang est le plus élevé, est aussi une fonction de r que nous

*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

appellerons $\mu(r)$. Si $n < \mu(r)$, donc

$$A_n r^n \leqslant A_{\mu(r)} r^{\mu(r)} = B(r)$$

cette inégalité vaut *a fortiori* lorsque r est remplacé par un nombre plus grand, donc $\mu(r)$ est une fonction non décroissante de r. En outre, si $p > n$, on a $A_p r^p > A_n r^n$ pourvu que $A_p \neq 0$ et que r soit assez grand, $\mu(r)$ ne reste pas borné. *Le rang* $\mu(r)$ *est une fonction non décroissante de* r *qui tend vers l'infini avec* r.

D'après l'inégalité de Cauchy (§ I, (2)) on a

$$B(r) < M(r) , \tag{2}$$

$M(r)$ étant le module maximum de $f(z)$.

Pour étudier la relation entre $B(r)$ et $M(r)$, il est commode d'employer un procédé géométrique dû à Hadamard. Posons

$$\log A_n = - g_n$$

(g_n étant infini si $A_n = 0$). On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n} = + \infty \tag{3}$$

puisque $\sqrt[n]{A_n}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Prenons deux axes de coordonnées Ox, Oy et marquons les points C_n de coordonnées n, g_n. Lorsque $A_n = 0$, l'ordonnée y de C_n est $+\infty$. D'après (3) on peut construire un polygone de Newton admettant pour sommets une suite de points C_n, les autres points C_n étant sur les côtés ou au-dessus des côtés; ce polygone que nous appellerons $\Pi(f)$ étant convexe vers le bas. En effet, en supposant, par exemple, $A_0 \neq 0$, la pente des droites $C_0 C_n$ a un minimum (d'après (3)), ce minimum correspond à une droite $C_0 C_p$, tous les autres points C_n sont sur $C_0 C_p$ (entre C_0 et C_p) ou au-dessus de $C_0 C_p$. On considère alors les droites $C_p C_n$ pour $n > p$, leurs pentes ont un minimum atteint pour une droite $C_p C_q$, et tous les C_n sont sur $C_p C_q$ (entre C_p et C_q) ou au-dessus de cette droite. Et ainsi de suite.

Nous dirons que les abscisses des sommets de $\Pi(f)$ sont les *indices principaux* de la suite des coefficients A_n. Nous désignerons par G_n l'ordonnée du point d'abscisse entière n de $\Pi(f)$.

On a $G_n = g_n$ pour les indices principaux et $g_n \geqslant G_n$ pour les autres n. Pour une valeur de r, le logarithme de $A_p r^p$ est infé-

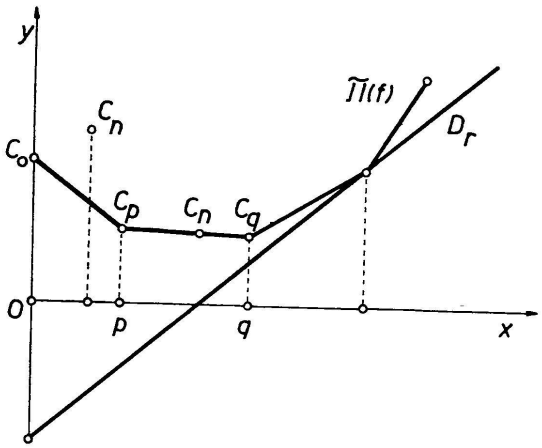

Fig. 3.

rieur ou égal au logarithme du terme maximum $B(r) = A_n r^n$, $n = \mu(r)$, donc

$$p \log r - g_p \leqslant n \log r - g_n , \qquad n = \mu(r)$$

ou

$$g_p \geqslant g_n + (p - n) \log r .$$

Géométriquement cela signifie que les points C_p sont au-dessus ou sur la droite de pente $\log r$ passant par le point C_n, $n = \mu(r)$. Par suite, la droite de pente $\log r$ ne coupe pas $\Pi(f)$ et contient un point C_n, c'est la « tangente » de pente $\log r$ menée à $\Pi(f)$. Ainsi, le rang $\mu(r)$ du terme maximum est l'abscisse du point de contact de la tangente D_r de pente $\log r$ menée à $\Pi(f)$, ou l'abscisse du sommet de plus haut rang situé sur le côté de pente $\log r$ lorsque $\log r$ est la pente d'un côté de $\Pi(f)$. Lorsque r croît, la tangente D_r tourne autour du sommet de $\Pi(f)$ dont l'abscisse est $\mu(r)$, puis autour du sommet suivant, etc. Les valeurs de $\mu(r)$ sont les indices principaux. La tangente D_r coupe Oy au point d'ordonnée $g_n - n \log r = - \log B(r)$.

Pour toutes les fonctions $f(z)$ admettant le même polygone $\Pi(f)$ le terme maximum $B(r)$ est le même, ainsi que $\mu(r)$. La fonction

$$F(z) = \sum_0^\infty e^{-G_n} z^n$$

est une fonction majorante pour toutes ces fonctions et a B (r) pour terme maximum et $\mu(r)$ pour rang de ce terme.

Le rapport

$$R_n = e^{G_n - G_{n-1}}$$

de deux coefficients successifs de F (z) est *le rapport rectifié* de A_{n-1} à A_n. La quantité $\log R_n$ est la pente de $\Pi(f)$ entre les points d'abscisses $n - 1$ et n. C'est une fonction non décroissante de n qui tend vers l'infini avec n.

Supposons pour simplifier $|f(0)| = 1$. (On passera aisément au cas général $f(0) \neq 0$ et aux cas particuliers $f(0) = 0$.) Nous aurons

$$e^{G_n} = R_1 R_2 \dots R_n$$

et

$$B(r) = \frac{r^{\mu(r)}}{R_1 R_2 \dots R_{\mu(r)}} \cdot \tag{4}$$

Or

$$\int_{R_q}^{R_{q+1}} \mu(t) \frac{dt}{t} = q \log \frac{R_{q+1}}{R_q}, \qquad \int_{R_{\mu(r)}}^{r} \mu(t) \frac{dt}{t} = \mu(r) \log \frac{r}{R_{\mu(r)}},$$

donc

$$\log B(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt \cdot \tag{5}$$

Dans le cas général, on aura

$$\log B(r) = \log B(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{\mu(t)}{t} dt, \qquad 0 < r_0 < r. \tag{6}$$

Telle est la relation entre B (r) et $\mu(r)$. Si l'on donne $|f(0)| \neq 0$, par exemple, la donnée de la suite R_n détermine un polygone Π et une classe de fonctions entières. De même, la donnée de $\log B(r_0)$ et d'une fonction $\mu(t)$ non décroissante ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles détermine Π.

12. *Relation entre* B (r) *et* M (r). *Cas des fonctions d'ordre fini. Conséquences.*

On a la relation (2) entre B (r) et M. (r). Pour obtenir une relation dans l'autre sens, Hadamard employait une méthode

géométrique qui est exposée dans les *Leçons sur les séries à termes positifs* de Borel. Nous utiliserons une méthode analytique. On a évidemment

$$M(r) \leqslant F(r) = \sum_0^\infty e^{-G_n} r^n .$$

Si p est un entier supérieur à $\mu(r)$ et tel que $R_p > r$, on a pour $q \geqslant p$,

$$e^{-G_q} r^q = e^{-G_{p-1}} r^{p-1} \frac{r^{q-p+1}}{R_p \ldots R_q} \leqslant B(r) \left(\frac{r}{R_p}\right)^{q-p+1},$$

par suite

$$F(r) = \sum_0^{p-1} e^{-G_n} r^n + \sum_p^\infty e^{-G_n} r^n$$

$$< B(r) \left[p + \sum_p^\infty \left(\frac{r}{R_p}\right)^{q-p+1} \right] = B(r) \left[p + \frac{r}{R_p - r} \right].$$

Prenons

$$p = \mu\left[r + \frac{r}{\mu(r)}\right] + 1$$

ce qui entraîne

$$R_p > r + \frac{r}{\mu(r)} .$$

Nous obtenons

$$B(r) < M(r) < B(r) \left(2\,\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right) + 1\right). \tag{7}$$

Le coefficient 2 au troisième membre ne peut pas être remplacé par un nombre inférieur à 1, car le nombre des termes égaux à $B(r)$ peut être voisin de $\mu(r)$ et $\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right) = \mu(r)$. De même, on ne peut pas remplacer $\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right)$ par $\mu(r)$.

Remarque. — D'après le calcul précédent, la somme des termes de $F(r)$ dont le rang n est supérieur à $Q > p$ est au plus

$$B(r)\,\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\mu(r)}}\right)^{Q-p+1} .$$

Si l'on prend

$$Q = 2\,\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right) \log\left(\mu\left(r + \frac{r}{\mu(r)}\right)\right) \tag{8}$$

on voit que ce reste est infiniment petit par rapport à B (r). Ainsi M (r) est déterminé asymptotiquement par ses Q premiers termes, Q étant la fonction (8) de r.

Cas de l'ordre fini. — Pour une fonction d'ordre fini ρ, l'inégalité (2) (première partie de (7)) donne

$$\log B(r) < r^{\rho+\varepsilon}$$

si petit que soit ε, pourvu que r soit assez grand. Remplaçant le premier membre par sa valeur (6), on obtient une borne pour $\mu(r)$. L'inégalité à résoudre est la même qu'au n° 5, on a la même borne pour $\mu(r)$ que pour $\nu(r)$,

$$\mu(r) < r^{\rho+\varepsilon} \qquad r > r_0(\varepsilon) .$$

Portant cette valeur dans les inégalités (7), on obtient

$$B(r) < M(r) < B(r)\, r^{\rho+\varepsilon} , \tag{9}$$

et comme corollaire, on voit que:

THÉORÈME. — *Pour une fonction d'ordre fini, log* M (r) *et log* B (r) *sont asymptotiquement égaux.*

Par conséquent, si l'on se donne log B (r) arbitrairement à partir d'une fonction $\mu(r)$ telle que $\mu(r)$ vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mu(r)}{\log r} = \rho ,$$

on peut construire le polygone Π correspondant. Pour toute fonction entière $f(z)$ admettant ce polygone, l'inégalité (7) a lieu et entraîne (9), la fonction M (r) est connue d'une façon approchée et notamment log M (r) est connu asymptotiquement. On peut ainsi construire une fonction entière d'ordre fini dont le logarithme du module maximum est asymptotiquement égal à une fonction donnée de log r, convexe en log r. En effet, une telle fonction est de la forme $C + \int_1^r \frac{\nu(t)\, dt}{t}$, $\nu(t)$ étant indéfiniment croissante et d'ordre fini. Il suffira de prendre pour $r > 1$,

$\mu(r) = \mathrm{E}(\nu(t))$, $\mathrm{E}(u)$ désignant la partie entière de u. On aura

$$\int_1^r \mu(t)\frac{dt}{t} = \int_1^r \frac{\nu(t)\,dt}{t} - h(r)\log r\ , \qquad 0 < h(r) < 1\ .$$

Non seulement la fonction ainsi construite répondra à la question, mais on aura

$$\log \mathrm{M}(r) - \int_1^r \frac{\nu(t)\,dt}{t} = \mathrm{O}(\log r)\ .$$

Pour une fonction d'ordre infini, on pourra encore dans certains cas avoir un résultat analogue si la croissance de $\nu(r)$ est assez régulière.

13. *Relation entre log* M (r) *et les coefficients* A_n.

Lorsqu'on donne les A_n, modules des coefficients tayloriens, les formules (7) et (9) fournissent une valeur approchée de $\mathrm{M}(r)$. Inversement, si $\log \mathrm{M}(r)$ est connue approximativement, en particulier connue asymptotiquement, que peut-on dire des A_n ?

Bornons-nous au cas des fonctions d'ordre fini. On a donc

$$\log \mathrm{M}(r) \sim \log \mathrm{B}(r) = \mathrm{C} + \int_1^r \frac{\mu(t)\,dt}{t}\ ,$$

C étant une constante. Supposons que $\log \mathrm{M}(r)$ soit compris entre deux fonctions $\Psi_1(r)$ et $\Psi_2(r)$ convexes en $\log r$. A ces fonctions correspondent des polygones Π_1' et Π_2'. Aux fonctions $\Psi_1(r)(1-\varepsilon)$ et $\Psi_2(r)(1+\varepsilon)$ correspondent Π_1 et Π_2. Comme $\log \mathrm{B}(r)$ est compris entre ces valeurs (pour $r > r(\varepsilon)$) la tangente D_r de pente $\log r$ à Π relatif, la fonction envisagée qui coupe $\mathrm{O}y$ au point $-\log \mathrm{B}(r)$ est comprise entre les tangentes de même pente $\log r$ à Π_1 et Π_2; le polygone Π est compris entre Π_1 et Π_2 puisque ces polygones sont convexes. La fonction G_n de n est comprise entre les fonctions analogues relatives à Π_1 et Π_2. Il en résulte une borne supérieure pour tous les coefficients A_n et une borne inférieure pour certains d'entre eux; on a en outre une limite pour l'écart des indices principaux successifs. Dans certains cas, on pourra trouver des conditions analytiques nécessaires et suffi-

santes. Mais en général la condition géométrique d'après laquelle Π est compris entre Π_1 et Π_2 ne s'exprimerait analytiquement que sous une forme extrêmement compliquée.

14. *Cas des fonctions d'ordre fini positif et d'ordre précisé* L.

Considérons d'abord une fonction parfaitement régulière par rapport à un ordre précisé $\rho(r)$. On a donc

$$\log B(r) \sim r^{\rho(r)}, \tag{10}$$

donc

$$\int_1^r \frac{\mu(t)\,dt}{t} \sim r^{\rho(r)}.$$

On a vu au n° 9 qu'une telle égalité se résout asymptotiquement. On a

$$\mu(r) \sim \rho\, r^{\rho(r)}.$$

La relation entre n et R_n est donc

$$n \sim \rho\, R_n^{\rho(R_n)} = \rho\, U(R_n). \tag{11}$$

La fonction inverse de $y = U(x)$, soit $x = W(y)$, a des propriétés analogues à celles de $U(x)$. Si l'on écrit $W(y) = y^{\omega(y)}$, on a

$$y = x^{\rho(x)}, \qquad x = y\, x^{\frac{1}{\rho(x)}}$$

donc $\omega(y)$ a pour limite $\frac{1}{\rho}$. D'autre part

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,U'(x)}{U(x)}\frac{dx}{x}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{y\,W'(y)}{W(y)}\frac{dy}{y}, \quad y\frac{W'(y)}{W(y)} = \frac{U(x)}{x\,V'(x)} \sim \frac{1}{\rho}$$

ce qui montre que $y \log y \,.\, \omega'(y)$ tend vers zéro. Ainsi

$$\lim_{y=\infty} \omega(y) = \frac{1}{\rho}, \qquad \lim_{y=\infty} y\,\omega'(y) \log y = 0. \tag{12}$$

La conséquence relative au rapport $W(ky)/W(y)$ subsiste et par suite (11) se résout sous la forme

$$R_n \sim W\left(\frac{n}{\rho}\right) \sim \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} W(n).$$

Alors, puisque

$$\log B(R_n) \sim U(R_n) \sim \frac{n}{\rho} = n \log R_n - G_n ,$$

on a

$$-G_n = \frac{n \log(\rho e)}{\rho} - n \log W(n) + o(n) \tag{13}$$

ou

$$-\frac{G_n}{n} = \frac{\log(\rho e)}{\rho} - \log W(n) + o(1) ,$$

enfin

$$e^{-\frac{G_n}{n}} \sim \frac{(\rho e)^{\frac{1}{\rho}}}{W(n)} . \tag{14}$$

Inversement, de (14) on remonte à (13). Donc, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand,

$$-\varepsilon n + \frac{n \log(\rho e)}{\rho} - n \log W(n) < -G_n < \frac{n \log(\rho e)}{\rho} - n \log W(n) + \varepsilon n .$$

Or, de

$$-G_n = \frac{n(\log \rho e)}{\rho} - n \log W(n) + \varepsilon n , \tag{15}$$

on déduit

$$\log R_n = G_n - G_{n-1} = -\frac{\log \rho e}{\rho} + \log W(n) + (n-1) \log \frac{W(n)}{W(n-1)} - \varepsilon .$$

Comme, d'après les propriétés de $W(n)$, on a

$$W(n-1) = W(n) - W'(n-\theta) = W(n) - W(n) \frac{1 + o(1)}{\rho n} , \qquad 0 < \theta < 1 ,$$

on voit qu'on déduit de (15)

$$\log R_n = -\frac{\log \rho}{\rho} - \varepsilon + \log W(n) + o(1)$$

donc

$$e^{\varepsilon} R_n \sim \left(\frac{1}{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} W(n) \sim W\left(\frac{n}{\rho}\right) . \tag{16}$$

On retrouve la formule qui avait été déduite de (11) mais R_n y est remplacé par le premier membre de (16). On aura donc

$$n \sim \rho U\left(R_n e^{\varepsilon}\right) \sim \rho e^{\varepsilon\rho} U\left(R_n\right) , \qquad \mu(r) \sim \rho e^{\varepsilon\rho} U(r) \sim e^{\varepsilon\rho} r U'(r)$$

et en intégrant

$$\log B(r) \sim e^{\varepsilon\rho} U(r) . \tag{17}$$

De même, en remplaçant ε par $-\varepsilon$ dans (15) on obtiendra le résultat analogue à (16) mais où ε est remplacé par $-\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, il s'ensuit que (14) entraîne (10) et aussi (11).

L'égalité (11) montre que R_n croît si n est remplacé par $n(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ arbitraire. C'est dire que le rapport de deux indices principaux successifs tend vers un lorsque $n \to \infty$.

D'après (14), on a pour tous les n,

$$\sqrt[n]{A_n} < (1 + o(1)) \frac{(\rho e)^{\frac{1}{\rho}}}{W(n)} \tag{18}$$

et pour les indices principaux au moins

$$\sqrt[n]{A_n} > (1 - o(1)) \frac{(\rho e)^{\frac{1}{\rho}}}{W(n)}, \qquad n = n_p, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1 . \tag{19}$$

Inversement, ces inégalités entraînent (14) puisque le rapport G_n/n croît à partir d'une valeur de n et puisque $W(n')/W(n)$ tend vers un si n'/n tend vers un.

En définitive:

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction entière* $f(z)$ *soit d'ordre précisé* $\rho(r)$ *et à croissance parfaitement régulière est que* $W(y)$ *étant la fonction inverse de* $U(x) = x^{\rho(x)}$, *les conditions (18) et (19) soient réalisées. En outre, si l'on se donne à priori une fonction* $W(y) = y^{\omega(y)}$, $\omega(y)$ *vérifiant les conditions (12) et les* A_n *vérifiant les inégalités (18), (19), les fonctions* $f(z)$ *dont les modules des coefficients sont les* A_n *sont telles que*

$$\log M(r) \sim U(r) ,$$

$U(x)$ *étant la fonction inverse de* $x = W(y)$.

Par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\log M(r) \sim C r^{\rho}$$

C étant constant, est que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{A_n} \left(\frac{C\rho e}{n}\right)^{-\frac{1}{\rho}} = 1$$

et que, pour une suite de valeurs n_p de n,

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n} \left(\frac{n}{C \rho e}\right)^{\frac{1}{\rho}} = 1 , \quad n = n_1 , \quad \ldots , \quad n_p , \quad \ldots , \quad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1 .$$

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n} [n \log n]^{\alpha} = 1$$

on a

$$W(n) = \left(\frac{e\, n \log n}{\alpha}\right)^{\alpha}, \qquad n \sim \frac{\alpha^2 r^{\frac{1}{\alpha}}}{e \log r} ,$$

donc

$$\log M(r) \sim \frac{\alpha^3 r^{\frac{1}{\alpha}}}{e \log r} .$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une fonction $f(z)$ quelconque d'ordre précisé $\rho(r)$. On a seulement

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log B(r)}{U(r)} = 1 , \qquad U(r) = r^{\rho(r)} . \tag{20}$$

Si Π (F) est le polygone d'Hadamard correspondant à une fonction pour laquelle (20) est remplacé par (10), les tangentes à $\Pi(f)$ sont asymptotiquement au-dessus des tangentes à Π (F), donc $\Pi(f)$ au-dessus de Π (F), les coefficients A_n de f (z) vérifient l'inégalité (18). On ne peut pas avoir, à partir d'une valeur de n l'inégalité (18) où 0 (1) serait remplacé par $-\varepsilon$, en vertu de la réciproque du théorème I précédent. Par suite

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que* f (z) *soit d'ordre précisé* L ρ (r) *est que,* W (y) *étant la fonction inverse de* y = U (x), *on ait*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{A_n}\, W(n) (\rho e)^{-\frac{1}{\rho}} = 1 .$$

Supposons maintenant que $\rho(r)$ jouissant des propriétés de l'ordre précisé, on ait pour une fonction $f(z)$,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{U(r)} = C , \quad \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{U(r)} = B , \quad 0 < B < C , \quad U(r) = r^{\rho(r)} .$$

Comme on le voit de suite

$$\rho(r) + \frac{\log C}{\log r}, \qquad \rho(r) + \frac{\log B}{\log r} \tag{21}$$

sont aussi des ordres précisés. Le polygone d'Hadamard $\Pi(f)$ sera asymptotiquement compris entre les polygones correspondant aux fonctions parfaitement régulières relatives aux ordres (21); les G_n vérifieront les conditions déduites de (13)

$$\log W\left(\frac{n}{C}\right) - \frac{n \log(\rho e)}{\rho} - o(n) < G_n < n \log W\left(\frac{n}{B}\right) - \frac{n \log(\rho e)}{\rho} + (n)\, o\ ,$$

et ces conditions seront suffisantes.

15. *Cas des fonctions d'ordre nul.*

On peut évidemment procéder exactement de la même façon. En posant comme au n° 10, $X = \log r$, cherchons les propriétés des modules A_n des coefficients tayloriens qui entraînent

$$\lim_{X=\infty} \frac{V(X)}{X^{k(X)}} = 1\ , \qquad V(X) = \log M(r)\ , \tag{22}$$

avec

$$\overline{\lim_{X=\infty}}\ k(X) = k > 1\ , \qquad \lim_{X=\infty} k'(X)\, X \log X = 0\ .$$

On a vu que la dérivée $w(X)$ de $V(X)$ vérifie l'égalité obtenue en dérivant, on aura donc aussi

$$\mu(\varepsilon) \sim k\, X^{k(X)-1}\ .$$

On a ici

$$n \sim k\, X_n^{k(X_n)-1}\ , \qquad X_n = \log R_n\ .$$

C' est ici l'inverse de la fonction $Y = X^{k(X)-1}$ qu'il convient d'introduire. Comme $k(X) - 1$ jouit des propriétés de $k(X)$ (sauf qu'il tend vers $k - 1$ et non pas vers k), l'inverse $X = Y^{\omega(Y)} = Z(Y)$ jouit encore des mêmes propriétés; $\omega(Y)$ tend vers $\frac{1}{k-1}$. On a

$$X_n = \log R_n \sim Z\left(\frac{n}{k}\right) \sim k^{\frac{1}{1-k}}\, Z(n)$$

et

$$-G_n = \log B(R_n) - n X_n \sim \left(\frac{1}{k} - 1\right) n X_n \sim -(k-1) k^{\frac{k}{1-k}} n Z(n) . \quad (23)$$

Inversement, si G_n vérifie cette égalité, on a l'égalité (22). Car, en prenant

$$G_n = +(1+\varepsilon)(k-1) k^{\frac{k}{1-k}} n Z(n)$$

on obtient

$$X_n = (1+\varepsilon)(k-1) k^{\frac{k}{1-k}} (n Z(n))'$$

la dérivée étant prise pour la valeur $n - \theta$, $0 < \theta < 1$, ce qui donne

$$X_n = (1+\varepsilon)(1+o(1)) k^{\frac{1}{1-k}} Z(n) .$$

On retrouve ainsi en inversant

$$n \sim k X'^{k(X')-1} , \qquad X' = \frac{X_n}{1+\varepsilon} ,$$

puis $\mu(r)$, puis (22) où au dénominateur, X est remplacé par $\frac{X}{1+\varepsilon}$. Donc, comme au n° 14, la condition (23) est nécessaire et suffisante.

On achève, comme au n° 14, la seule modification étant que les limites d'indétermination des coefficients sont ici plus larges. On a cet énoncé:

Pour que l'égalité (22) ait lieu, il faut et il suffit que Z (Y) *étant la fonction inverse de* $X^{k(X)-1}$, *on ait*

$$\sqrt[n]{A_n} < e^{-(1-o(1))KZ(n)} , \qquad K = (k-1) k^{\frac{k}{1-k}} , \qquad (24)$$

et

$$\sqrt[n]{A_n} > e^{-(1+o(1))KZ(n)} , \quad n = n_p , \quad p = 1, 2, \dots , \quad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1 .$$

Par exemple, pour que l'on ait, C étant une constante,

$$\log M(r) \sim C (\log r)^2 ,$$

il faut et il suffit que

$$\sqrt[n^2]{A_n} < e^{-\frac{1}{4C}} (1 + o(1)) ,$$

et que, pour une suite de valeurs n_p telles que n_{p+1}/n_p tende vers un,

$$\sqrt[n^2]{A_n} \sim e^{-\frac{1}{4C}} , \qquad n = n_p .$$

On déduira de l'étude faite que

La condition nécessaire et suffisante pour que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{X^{k(X)}} = 1 , \qquad X = \log r ,$$

est que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log A_n}{K\, n\, Z(n)} = -1 ,$$

K *étant le nombre défini dans (24).*

16. *Cas des fonctions d'ordre nul à croissance très lente.*

Hadamard a observé que, si pour une valeur de n, les rapports rectifiés R_{n+1}, R_n vérifient la condition

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} \geqslant k^2 , \qquad k > 1 ,$$

on a, pour $r = k\, R_n$

$$f(z) = a_n z^n \left[1 + \frac{2\,\alpha(z)}{k-1}\right] , \qquad |\alpha(z)| < 1 , \qquad |z| = r , \qquad (25)$$

et que, par suite, si $k^2 > 9$, $f(z)$ a exactement n zéros dans le cercle de rayon kR_n centré à l'origine.

L'égalité (25) est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\left| a_{n+p} z^{n+p} \right| \leqslant \left| a_n z^n \right| \frac{r^p}{R_n^p k^{2p}} , \qquad p \gtrless 0 .$$

et la conclusion découle du théorème connu sur la variation de l'argument.

Hadamard utilisait cette proposition pour obtenir des fonctions pour lesquelles le cas d'exception du théorème de Picard ne se produisait pas. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit d'ailleurs que la limite supérieure de R_{n+1}/R_n soit supérieure à 1 [3].

Pour que l'inégalité relative au rapport R_{n+1}/R_n ait lieu une infinité de fois, il suffit que, à partir d'une valeur de n,

$$R_n \geqslant k^{2n} ,$$

donc que

$$R_1 R_2 \dots R_n > k^{n^2} C ,$$

C étant une constante. On déduit alors du n° 15 que:

Pour toute fonction entière vérifiant l'une des conditions équivalentes

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} < \frac{1}{4 \log 3} , \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n^2]{A_n} < \frac{1}{3} ,$$

il existe une suite de cercles $|z| = r$, *de rayons indéfiniment croissants, qui renferment un nombre de zéros égal au rang du terme maximum du développement de Taylor.*

Si l'on suppose que, à partir d'un certain rang, les coefficients a_n sont tous différents de zéro, et si, à partir de ce rang,

$$\left| \frac{a_n^2}{a_{n-1}\, a_{n+1}} \right| \geqslant k^2 , \qquad k > 1 ,$$

on a, pour

$$r = k R_n = k \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| ,$$

$$f(z) = a_n z^n [1 + H(k)\, \alpha_n(z)] , \qquad H(k) = 2 \sum_1^\infty k^{-n^2} , \qquad |\alpha_n(z)| < 1;$$

donc, si $H(k) < 1$, c'est-à-dire si $k > 2,193\dots$, les zéros de $f(z)$ sont séparés par les cercles de rayons kR_n; sur ces cercles, on a

$$\log |f(z)| = \log B(r) + O(1) .$$

(On voit que les zéros de $f(z) - C$, où C est une constante arbitraire, sont aussi séparés par ces mêmes cercles.)

On peut préciser la position des zéros. Par exemple, si

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}\, a_{n+1}}{a_n^2} = 0$$

le zéro de rang n (les zéros étant classés par ordre de modules croissants) est donné par

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}(1 + o(1)) ;$$

on le voit de suite en mettant en évidence dans $f(z)$ les deux termes de module maximum pour $r = R_n$ [4].

17. *Remarques sur l'approximation de* M (r).

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $|z| \leqslant r$, c'est-à-dire holomorphe pour $|z| < R$, $r < R$, et si

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n ,$$

la fonction $g(z)$ définie par

$$g(z) = \sum_0^\infty \overline{a_n} \left(\frac{r^2}{z}\right)^n , \qquad \overline{a_n}\, a_n = |a_n|^2 ,$$

est holomorphe pour $|z| \geqslant r$. Le produit $f(z)\, g(z)$ est holomorphe dans la couronne $\frac{r^2}{R} < |z| < R$, donc développable en série de Laurent. Le terme de ce développement qui est indépendant de z est donné par une intégrale prise sur la circonférence $|z| = r$, ce qui conduit à la formule de Gutzmer

$$\sum_0^\infty A_n^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^2 d\varphi \text{ [5]}$$

Si l'on désigne par $[G(r)]^2$ le premier membre de cette formule, on voit que, pour toute fonction entière, on a

$$B(r) < G(r) < M(r) \leqslant F(r) = \sum_0^\infty A_n r^n , \qquad A_n = |a_n| .$$

On peut déduire de là une valeur approchée de $M(r)$ au moyen de $F(r)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_0^p A_n r^n\right)^2 \leqslant (p+1) \sum_0^p A_n^2 r^{2n} .$$

D'après une remarque du n° 12, il suffit de prendre $p+1$ de la forme

$$\left[\nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right)\right]^{1+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0$$

pour que le premier membre soit asymptotiquement supérieur à $M(r)^2$. Dans le cas de l'ordre fini ρ, on obtient ainsi les inégalités de Brinkmeier

$$F(r) < G(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon} < M(r)\, r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}$$

valables à partir d'une valeur $r(\varepsilon)$ de r [6].

En utilisant la même méthode et les résultats de la méthode de Wiman et Valiron (*Lectures on the general theory of integral functions*, chap. IV), on obtient de même les inégalités

$$F(r) < G(r)\,[\nu(r)]^{\frac{1}{4}+\varepsilon}, \qquad F(r) < G(r)\,[\log B(r)]^{\frac{1}{4}+\varepsilon},$$

$$F(r) < G(r)\, r^{\frac{\rho}{4}+\varepsilon},$$

valables, les premières pour toute fonction entière, la troisième pour une fonction d'ordre fini ρ, sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ est finie [7].

III. Décomposition en facteurs et conséquences.

18. *Théorème de Jensen. Application aux fonctions entières d'ordre fini.*

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $|z| \leqslant r$ et supposons que l'origine ne soit ni zéro, ni pôle et que la circonférence $|z| = x$ ne contienne ni zéro, ni pôle. Si $n(x)$ désigne le nombre des zéros et $p(x)$ le nombre des pôles dont le module est inférieur à x, chaque zéro ou pôle étant compté un nombre de fois égal à

son ordre de multiplicité, on sait que, d'après le théorème des résidus

$$n(x) - p(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} xe^{i\varphi} i\,d\varphi$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{n(x)}{x} - \frac{p(x)}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} e^{i\varphi} d\varphi .$$

Intégrons entre x' et x'' les deux membres de cette égalité en supposant d'abord que la couronne $x' \leqslant |z| \leqslant x''$ ne contienne ni pôles, ni zéros. Nous obtenons

$$\int_{x'}^{x''} \frac{n(x)}{x} dx - \int_{x'}^{x''} \frac{p(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{f(x''e^{i\varphi})}{f(x'e^{i\varphi})} d\varphi$$

et, puisque le premier membre est réel, nous pourrons mettre au second membre

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(x''e^{i\varphi})| - \log|f(x'e^{i\varphi})|\,d\varphi .$$

En outre, pour un pôle ou zéro de $f(z)$, $\log|f(z)|$ a un infini logarithmique, la formule reste donc valable si les circonférences $|z| = x'$ et $|z| = x''$ renferment des pôles ou des zéros; $n(x)$ et $p(x)$ seront les nombres de zéros et de pôles de module au plus égal à x. En ajoutant les formules ainsi obtenues dans les couronnes limitées par les cercles de centre origine passant par les zéros et les pôles, on obtient

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx - \int_0^r \frac{p(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log|f(0)| . \quad (1)$$

C'est la formule de Jensen. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent les zéros, chacun figurant un nombre de fois égal à son ordre de multi-

plicité, on sait d'après le n° 11 que

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \log \frac{r^n}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|} \cdot \tag{2}$$

Dans le cas où $f(z)$ admettrait, par exemple, un zéro d'ordre q à l'origine, on appliquerait la formule (1) à $f(z)\,z^{-q}$.

Appliquons la formule (1) au cas d'une fonction entière d'ordre fini ρ; $n(x)$ désignant alors le nombre des zéros non nuls de module inférieur à x, nous obtenons, si $r > 1$

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{|f(re^{i\varphi})|}{r^q}\,d\varphi + C < \log M(r) + C\,, \tag{3}$$

C étant une constante; donc si petit que soit ε positif, on a, pour r assez grand,

$$\int_{r_0}^r \frac{n(x)}{x}\,dx < r^{\rho+\varepsilon}\,, \qquad r_0 > 0\,. \tag{4}$$

C′ est l'inégalité déjà rencontrée deux fois (n°s 5 et 12). Elle entraîne

$$n(r) < r^{\rho+\varepsilon}\,, \qquad r > r(\varepsilon)\,,$$

donc aussi, les α_n étant les zéros non nuls,

$$n < |\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}$$

ou encore

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+2\varepsilon}} < \frac{1}{n^{1+\eta}}\,, \qquad 1+\eta = \frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon} > 1\,.$$

Comme ε est arbitraire, on voit que

Pour une fonction d'ordre fini ρ, la série formée avec les inverses des modules des zéros élevés à une puissance supérieure à ρ est convergente.

Si $\rho(r)$ est un ordre précisé, l'inégalité (4) est remplacée par

$$\int_{r_0}^r \frac{n(x)}{x}\,dx < [1 + o(1)]\,r^{\rho(r)}$$

et on a vu qu'il en résulte (nº 7)

$$n(r) < [1 + o(1)]\rho e r^{\rho(r)} .$$

La recherche des cas où la série $|\alpha_n|^{-\rho}$ converge a conduit à distinguer deux classes de fonctions d'ordre ρ. Considérons l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{1+\rho}} dr ,$$

et convenons de dire que la fonction est de la *classe convergente* si cette intégrale converge, de la *classe divergente* si elle diverge [8]. En multipliant les membres extrêmes de (3) par $\frac{dr}{r^{1+\rho}}$ et intégrant de r_0 à ∞, on voit que, pour une fonction de la classe convergente,

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{1+\rho}} \int_{r_0}^{r} \frac{n(x)}{x} dx \tag{5}$$

converge. En intégrant par parties, on en déduit que l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{n(x)\, dx}{\rho x^{1+\rho}} \tag{6}$$

est aussi convergente. Car l'intégration par parties de (5) où l'intégrale extérieure est prise entre r_0 et R donne

$$\frac{1}{\rho} \int_{r_0}^{R} \frac{n(x)}{x} \left(\frac{1}{x^\rho} - \frac{1}{R^\rho}\right) dx > \frac{1}{\rho} \int_{r_0}^{\frac{R}{2}} \frac{n(x)\, dx}{x^{1+\rho}} (1 - 2^{-\rho}) .$$

Or, on vérifie de suite que l'intégrale (6) et la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^\rho} \tag{7}$$

convergent et divergent simultanément. Par suite:

Si la fonction est de la classe convergente de l'ordre ρ, la série (7) formée avec les modules des zéros est convergente [9].

19. *Théorème d'Hadamard-Carathéodory sur la partie réelle. Décomposition en facteurs des fonctions d'ordre inférieur à un.*

Rappelons d'abord le

Lemme de Schwarz. — Si la fonction $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < R$, si $f(0) = 0$ et si dans le cercle considéré $|f(z)| < M$, on a dans ce cercle

$$|f(z)| \leqslant M \frac{|z|}{R},$$

l'égalité n'étant possible que si $f(z)$ est un monôme linéaire.

C'est une conséquence du théorème de Cauchy sur le module maximum, appliqué à $\frac{f(z)}{z}$.

Considérons alors une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < R$, nulle pour $z = 0$ et supposons que, dans ce cercle, sa partie réelle soit inférieure à un nombre A, qui est nécessairement positif, car exp. A est le maximum du module de la fonction exp. $f(z)$ dont le module est 1 à l'origine. (On suppose évidemment que $f(z) \not\equiv 0$). Les valeurs $Z = f(z)$ appartiennent au demi-plan $X = RZ < A$. Faisons la représentation conforme de ce demi-plan sur le cercle $|\xi| < 1$, le point $Z = 0$ donnant $\xi = 0$ et la direction positive de l'axe réel étant conservée. Elle est donnée par

$$\xi = \frac{Z}{2A - Z}$$

et transforme $Z = f(z)$ en la fonction $\xi = f(z)/[2A - f(z)]$, holomorphe pour $|z| < R$, nulle à l'origine et de module au plus égale à 1. D'après le lemme de Schwarz, on a $|\xi| \leqslant |z| \frac{1}{R}$ l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\xi = \omega \frac{z}{R}$, $|\omega| = 1$. Or

$$f(z) = \frac{2A\xi}{1 + \xi}, \qquad \xi = \theta(z) \frac{z}{R}, \qquad |\theta(z)| \leqslant 1 ;$$

on a donc

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{R - |z|}, \tag{8}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $\xi = \omega \frac{z}{R}$. C'est l'inégalité de Carathéodory, qui complète et précise un théorème antérieur d'Hadamard.

Supposons alors que $f(z)$ soit une fonction entière et que, pour $|z| = r$ assez grand, on ait max. $R\,f(z) = o(r^k)$, k étant un nombre fixe. Appliquons l'inégalité (8) à $f(z) - f(0)$ en prenant $R = 2r$, on aura

$$|f(z)| < |f(0)| + 2\left(o\left((2r)^k\right) + |f(0)|\right)$$

ce qui montre en utilisant les inégalités de Cauchy (n° 1), que $f(z)$ est un polynôme inférieur à k. Ainsi

Si $f(z)$ *est une fonction entière et si max.* $R\,f(z) = o(r^k)$, $f(z)$ *est un polynôme de degré moindre que* k (Hadamard).

Considérons alors une fonction entière $f(z)$ (une vraie fonction entière) d'ordre ρ inférieur à 1. Si elle a une infinité de zéros α_n, la série

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_n|} \tag{9}$$

est convergente d'après le théorème du n° 18. Le produit infini formé avec les zéros non nuls

$$\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

est convergent. S'il y a à l'origine un zéro d'ordre q, la fonction

$$g(z) = z^q \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)$$

a les mêmes zéros que $f(z)$ avec les mêmes ordres de multiplicité. Le quotient $f(z)/g(z)$ est une fonction entière sans zéros, donc une exponentielle, exp. $h(z)$, $h(z)$ étant une fonction entière ou un polynôme. Nous allons montrer que $h(z)$ est une constante en montrant que sa partie réelle est bornée par $o(r)$. Il résultera bien du théorème d'Hadamard qui vient d'être établi que $h(z)$ est une constante. Ecrivons avec E. Landau

$$e^{h(z)} = \frac{f(z)}{z^q \prod_1^m \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)} \quad \frac{1}{\prod_{m+1}^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)} \tag{9'}$$

en supposant $|z| = r$ très grand et prenant m tel que $|\alpha_m| \leqslant 2r$, $|\alpha_{m+1}| > 2r$. Au second membre de (9′), le premier terme est une fonction entière, le maximum de son module pour $|z| = r$ est inférieur au maximum de ce module pour $|z| = 4r$; or pour $|z| = 4r$, on a $\frac{z}{\alpha_n} \geqslant 2$, le dénominateur est supérieur à 1 et au numérateur $M(4r) < e^{(4r)^{\rho+\varepsilon}}$, avec $\rho + \varepsilon < 1$ si ε est assez petit. Le logarithme du module du premier facteur du second membre est donc égal à $o(r)$. Dans le second facteur $\left|\frac{z}{\alpha_n}\right|$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$ et si $0 < v < \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{1-v} < 1 + 2v < e^{2v}.$$

Le logarithme du module du second facteur du second nembre de (9′) est donc moindre que

$$2r \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|}$$

et le reste de la série convergente tendant vers zéro, cette borne est encore $o(r)$. On a

$$\max \mathrm{R}\, h(z) = o(r),$$

$h(z)$ est une constante. Ainsi, comme la démonstration vaudrait encore si la fonction n'avait qu'un nombre fini de zéros et conduirait à la conclusion que cette fonction est un polynôme, on voit que

Une vraie fonction entiére f (z) *d'ordre fini* ρ *inférieur à 1 possède une infinité de zéros* α_n *et peut être décomposée en facteurs sous la forme*

$$f(z) = C z^q \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) \tag{10}$$

De ce résultat, on déduirait le théorème général d'Hadamard sur la décomposition en facteurs des fonctions entières d'ordre fini quelconque [10].

Le résultat s'étend aux fonctions de la classe convergente de l'ordre 1. Car, pour une telle fonction, la série (9) converge, et

d'autre part

$$\frac{1}{2}\log M(r) < \int_r^\infty \frac{\log M(x)}{x^2}\,dx = o(1)\,.$$

Dans tous ces cas, le produit figurant dans (10) est un produit canonique P (z) de genre 0, la fonction $f(z)$ est dite de genre 0.

20. *Maximum du module d'un produit canonique de genre* 0.

Si la série (9) converge et si l'on pose $|\alpha_n| = r_n$, on a

$$|P(z)| = \left|\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right)\right| \leqslant \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_n}\right), \qquad r = |z|\,.$$

Désignons désormais par $M(r, f)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$. Nous aurons

$$\log M(r, P) \leqslant \sum_1^\infty \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right). \tag{11}$$

La série du second membre peut être remplacée par une intégrale. Si $r(y)$ est une fonction égale à r_{n+1} lorsque $n \leqslant y < n + 1$, c'est

$$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{r}{r(y)}\right) dy\,.$$

On pourrait intégrer par parties. Mais on peut aussi écrire le second membre de (11) sous la forme

$$\sum_1^\infty [n - (n-1)] \log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) = \sum_1^n n \left[\log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) - \log\left(1 + \frac{r}{r_{n+1}}\right)\right] \tag{12}$$

car, la série (9) étant convergente et à termes non croissants, le rapport n/r_n tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. On peut écrire

$$\log\left(1 + \frac{r}{r_n}\right) - \log\left(1 + \frac{r}{r_{n+1}}\right) = \int_{r_n}^{r_{n+1}} d\left(-\log\left(1 + \frac{r}{x}\right)\right) = \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{r\,dx}{x(x+r)}$$

et le second membre de (12) est alors égal à

$$\int_0^\infty \frac{r\,n(x)}{x(x+r)}\,dx\,.$$

Donc

$$\log \mathrm{M}(r, \mathrm{P}) \leqslant \int_0^\infty \frac{r\,n(x)}{x(x+r)}\,dx\,, \tag{13}$$

l'égalité ayant lieu lorsque les zéros sont réels et négatifs. D'après (10) on voit que, pour une fonction d'ordre ρ inférieur à 1, ou pour une fonction d'ordre 1 de la classe convergente, on a

$$\log \mathrm{M}(r, f) < \int_0^\infty \frac{r\,n(x)\,dx}{x(x+r)} + \mathrm{O}(\log r)\,. \tag{14}$$

Si on se donne à priori la fonction (10), la série (9) étant convergente, l'inégalité (14) est aussi valable. Supposons la série (7) convergente, avec $\rho < 1$. Multiplions les deux membres de (14) par $\frac{dr}{r^{1+\rho}}$ et intégrons de $r_0 > 0$ à R, en mettant dans l'intégrale du second membre de (14) la limite r_0 au lieu de 0, ce qui ne change rien par suite de la présence de O (log r). Nous obtenons

$$\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{\log \mathrm{M}(r, f)}{r^{1+\rho}}\,dr < \int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{dr}{r^\rho} \int_{r_0}^\infty \frac{n(x)\,dx}{x(x+r)} + \mathrm{O}(1)\,. \tag{15}$$

Comme $\int_{r_0}^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2}$ converge (n° 18), l'intégrale intérieure dans (15) converge uniformément quel que soit r positif, on peut intervertir l'ordre des intégrations et poser ensuite $r = tx$ de telle sorte que l'intégrale du second membre de (15) devient

$$\int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{n(x)}{x^{1+\rho}}\,\Phi(x)\,dx\,, \quad \Phi(x) = \int_{\frac{r_0}{x}}^{\frac{\mathrm{R}}{x}} \frac{dt}{(1+t)\,t^\rho} < \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\,t^\rho} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho}\,.$$

Par hypothèse, la première intégrale, où $\Phi(x)$ est remplacé par une constante, converge lorsque $R \to \infty$. Le premier membre de (15) est borné, $f(z)$ est de la classe convergente. Il s'ensuit, compte tenu du résultat du n° 18, que

I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ inférieur à un soit de la classe convergente est que la série (7) converge.*

Pour une fonction d'ordre inférieur à 1, la série (7) et l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^{1+\rho}} dr$$

convergent ou divergent simultanément.

Supposons maintenant que ρ étant inférieur à 1, et $\rho(r)$ vérifiant les conditions de l'ordre précisé, on ait

$$n(r) < BU(r), \quad U(r) = r^{\rho(r)}, \tag{16}$$

B étant une constante finie. Si k est pris supérieur à 1, on a, d'après un calcul déjà fait

$$\int_0^{\frac{r}{k}} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < \int_0^{\frac{r}{k}} \frac{n(x)\,dx}{x} < \frac{B + o(1)}{k^{\rho}\,\rho} U(r). \tag{17}$$

D'autre part, si α est compris entre ρ et 1, $\rho(x)$ est inférieur à α si x est assez grand et $x^{\rho(x)-\alpha}$ est alors décroissant, donc

$$\int_{kr}^{\infty} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < r \int_{kr}^{\infty} \frac{B\,x^{\rho(x)-\alpha}\,dx}{x^{2-\alpha}} < B\,(rk)^{\rho(kr)-\alpha}\,r \int_{kr}^{\infty} \frac{dx}{x^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{B + o(1)}{(1-\alpha)\,k^{1-\rho}} U(r). \tag{18}$$

D'autre part,

$$\int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{rn(x)\,dx}{x(x+r)} < n(kr) \left[\log \frac{x}{x+r}\right]_{\frac{r}{k}}^{kr} = n(kr) \log k, \tag{19}$$

et

$$\int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{r\,U(x)\,dx}{x(x+r)} \sim \int_{\frac{r}{k}}^{kr} \frac{r\,x^{\rho(r)}\,dx}{x(x+r)} = U(r) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{t^{\rho(r)-1}\,dt}{1+t} \sim U(r) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \frac{t^{\rho-1}\,dt}{1+t} =$$

$$= U(r) \left[\frac{\pi}{\sin \pi\rho} + \frac{o(k)}{k}\right] \qquad (20)$$

lorsque k est très grand. De ces inégalités, on déduit les résultats suivants:

II. *Si* f (z) *est d'ordre* $\rho < 1$ *et d'ordre précisé* ρ (r), *on peut associer aux nombres* r *pour lesquels* $\log M(r, f) > [1 - o(1)]\,U(r)$ *des nombres* $R = kr$, *où* k *est suffisamment grand, pour lesquels* $n(R) > KU(R)$, K *dépendant de* k, *dès que* $R > R_0$ [11].

Car, d'après le n° 18, l'inégalité (15) est vérifiée avec $B > \rho e$ dès que r est assez grand; on peut alors prendre k assez grand pour que les derniers membres dans (17) et (18) soient inférieurs à $\frac{1}{4}U(r)$; alors d'après (14) et (19), on a

$$n(R) \log k > \frac{1}{4} U(r) > \frac{1}{5} k^{-\rho} U(R)$$

dès que R est assez grand.

En rapprochant de l'inégalité du n° 18, en remarquant que $U(R) > (1 - o(1)) \log M(R, f)$ et en considérant les zéros de $f(z) - Z$ où Z est un nombre arbitraire de module inférieur à R, ce qui ne modifie pas les inégalités, on voit que

III. *Si* f (z) *est d'ordre* $\rho < 1$, *il existe une suite de couronnes* $\lambda R_m < |z| < R_m$ *où* λ *est un nombre convenable inférieur à 1 et où* $\lim_{m=\infty} R_m = \infty$ *dans chacune desquelles le nombre des zéros de* $f(z) - Z$, *où* $|Z| < R_m$ *est compris entre*

$$\lambda' \log M(R_m, f) \quad \text{et} \quad \lambda'' \log M(R_m, f)$$

λ' *et* λ'' *étant des nombres positifs finis. On a d'ailleurs*

$$\log M(R_m, f) > \lambda''' U(R_m) .$$

Ceci se précise dans les cas de régularité:

IV. *Si* $\rho < 1$ *et* $\rho(r)$ *un ordre précisé de* $f(z)$ *et si, à partir d'une valeur* r, *on a*

$$\log M(r, f) > DU(r) , \qquad D > 0 ,$$

le nombre des zéros de $f(z) - Z$, $|Z| < r$, *inférieurs en module à* r *est compris entre* $h\,U(r)$ *et* $(1 + \varepsilon)\,\rho e\,U(r)$, *où* $\varepsilon > 0$ *arbitraire*, $h > 0$ *déterminé, et ceci à partir d'une valeur de* r.

Les propositions I, II, III, IV valent pour toutes les fonctions entières d'ordre fini non entier (voir VALIRON, *Lectures on...*, chap. III).

L'égalité (20) dans laquelle on fait croître k avec r, jointe aux inégalités (17) et (18) montre que:

V. *Si* $\rho(r)$ *jouit des propriétés de l'ordre précisé, si* $\rho < 1$ *et si la fonction* $f(z)$ *définie par (10) a tous ses zéros réels et négatifs, le nombre des zéros de module inférieur ou égal à* r *étant asymptotiquement égal à* $U(r)$, *on a*

$$\log M(r, f) \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho} U(r) .$$

Cette proposition est aussi un cas particulier d'un théorème relatif aux fonctions d'ordre fini non entier à zéros alignés sur une demi-droite, avec $n(r) \sim U(r)$. Elle comporte un complément, utile dans certaines questions, sur la valeur de $\log f(z)$ dans le plan privé du voisinage angulaire de la demi-droite portant les zéros. Elle admet une réciproque [12].

21. *Maximum du module des fonctions d'ordre nul.*

De l'inégalité (14) découle à fortiori, puisque $x + r > r$ et $x + r > x$,

$$\log M(r, f) < \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} + r \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2} + O(\log r) .$$

En comparant à l'inégalité (3) de Jensen, on voit que, pour les fonctions d'ordre inférieur à 1 (et pour les fonctions d'ordre 1 de la classe convergente), on a

$$\log M(r, f) = \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} + \theta r \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2} + O(\log r) , \quad 0 < \theta < 1 . \qquad (21)$$

Considérons d'abord la classe de fonctions d'ordre nul telles que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{(\log r)^2} < \infty . \tag{22}$$

qui, d'après le n° 15 sont caractérisées par la condition

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n^2]{A_n} < 1 . \tag{23}$$

Pour ces fonctions, on a, à partir d'une valeur de r,

$$\log M(r, f) < B (\log r)^2 ,$$

B étant fini, d'où l'on déduit, si $\lambda > 1$,

$$(\lambda - 1)\, n(r) \log r < \int_r^{r^\lambda} \frac{n(x)\, dx}{x} < B\, \lambda^2 (\log r)^2 ,$$

donc

$$n(r) < B' \log r , \qquad B' < 4B . \tag{24}$$

Il s'ensuit que

$$\int_r^\infty \frac{n(x)\, dx}{x^2} < B' \int_r^\infty \frac{\log x}{x^2}\, dx = B' \frac{\log r + 1}{r}$$

donc

$$\log M(r, f) = \int_0^r \frac{n(x)\, dx}{x} + O(\log r) \tag{25}$$

et, à fortiori,

$$\log M(r, f) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx . \tag{26}$$

D'ailleurs le calcul de la borne du second membre de (26) lorsque (24) a lieu, montre que (22) est alors vérifiée. Ainsi

I. *Pour toute fonction entière* f (z) *vérifiant l'une des conditions équivalentes (22), ou (23), ou*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\log r} < \infty ,$$

on a l'égalité (26).

Si l'on désigne d'une façon générale par $n(x, Z)$ le nombre des zéros non nuls de $f(z) - Z$ dont le module est inférieur ou égal à x et si l'on pose

$$N(r, Z) = \int_0^r \frac{n(x, Z)}{x} dx ,$$

on voit que, pour cette classe de fonctions vérifiant (22), on a

$$\log M(r, f) \sim N(r, Z) ,$$

quel que soit Z fini. *La moyenne* N (r, Z) *de Jensen a la même valeur asymptotique quel que soit* Z.

Lorsque $\log M(r, f)$ sera tel que l'on puisse déduire de (26) une valeur asymptotique de $n(r)$, les fonctions $n(r, Z)$ auront toutes la même valeur asymptotique qui sera asymptotiquement égale au rang $\nu(r)$ du terme maximum de la série de Taylor de $f(z)$. Ce sera le cas lorsque la condition (22) du n° 15 sera vérifiée avec $k < 2$ ou avec $k = 2$ et $k(X) \leqslant 2$. On peut remarquer que, dans ces conditions, on a

$$\log M(r, f) \sim \frac{n(r) \log r}{k} , \qquad k \sim \frac{\log_2 M(r, f)}{\log_2 r} \sim \frac{\log(n(r) \log r)}{\log_2 r} .$$

On peut chercher à déterminer toutes les fonctions pour lesquelles on a la première égalité ($k \geqslant 1$) ou celles obtenues en y remplaçant k par l'une de ses valeurs asymptotiques. Ce sont ces recherches, et celles analogues lorsque (22) n'a plus lieu, qui conduisent aux classifications dont il a été question au n° 10. Pour les fonctions à croissance plus lente que celles considérées au n° 15, on a $k = 1$ et les fonctions régulières sont celles pour lesquelles

$$V(X) = \log M(r, f) \sim \int_1^X \varpi(t)\, dt \sim X\varpi(X) , \qquad \varpi(X) = n(e^X) .$$

En désignant l'intégrale par W (X), on doit avoir

$$W(X) \sim XW'(X) ,$$

donc

$$\frac{W'}{W} \sim \frac{1}{X} , \qquad V(X) \sim W(X) = X^{1+\delta(X)} , \qquad \lim_{X=\infty} \delta(X) = 0 .$$

De la convexité de W (X) résulte que $X^{\delta(X)}$ est croissante dès que X est assez grand. Comme $\delta(X)$ tend vers zéro, ajoutons la condition qu'il décroisse. Alors, si

$$V(X) \sim X^{1+\delta(X)}, \qquad \delta(X) \downarrow 0, \qquad \delta(X) \log X \uparrow \infty$$

on a

$$w(X) \sim X^{\delta(X)}.$$

Car

$$V(X) \sim W(X) < X w(X), \qquad \text{donc} \qquad w(X) > \frac{V(X)}{X}$$

et

$$(X' - X)\, w(X) < (1 + o(1))\,(X')^{1+\delta(X')} < (1 + o(1)]\,(X')^{1+\delta(X)}.$$

En prenant $\log X' = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta(X) \log X}\right) \log X$, on obtient $w(X) < (1 + o(1))\, e^{\varepsilon} X^{\delta(X)}$, ce qui achève la démonstration.

A toute fonction $f(z)$ pour laquelle $\log V(X)/\log X$ tend vers un, on peut associer une fonction $\delta(X)$ telle que $\delta(X) \downarrow 0$, $\delta(X) \log X \uparrow \infty$ et

$$\overline{\lim_{X=\infty}} \frac{V(X)}{X^{1+\delta(X)}} = 1,$$

ce qui permet des approximations asymptotiques.

II. *Pour toute fonction d'ordre nul pour laquelle (22) n'est pas vérifiée, il existe encore une suite infinie de valeurs indéfiniment croissantes de* r *pour lesquelles l'égalité (26) a lieu.*

Cet énoncé est une partie du théorème de Littlewood qui sera donné au n° 24. Pour l'établir, il suffit, d'après (21), de montrer que, pour toute fonction d'ordre nul,

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{r \int_r^{\infty} \frac{n(x)}{x^2}\, dx}{\int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx} = 0. \tag{27}$$

Supposons le contraire, le numérateur dans (27) serait supérieur au produit d'un nombre positif h par le dénominateur que nous

désignerons par N (r). On aurait donc, en intégrant par parties au second membre,

$$hN(r) < r\int_r^\infty N'(x)\frac{dx}{x} = -N(r) + r\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2}$$

ou

$$(h+1)N(r) < r\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2} = rN_1(r)$$

et enfin

$$(h+1)rN_1'(r) + N_1(r) > 0\ , \qquad \frac{N_1'}{N_1} + \frac{1}{h+1}\frac{1}{r} > 0\ .$$

Ainsi la fonction

$$N_1 r^{\frac{1}{h+1}}$$

serait croissante, donc

$$\int_r^\infty N(x)\frac{dx}{x^2} > K r^{-\frac{1}{1+h}}$$

ce qui impliquerait que le produit $N(x)\,x^{-\frac{h}{1+h}}$ ne tendrait pas vers zéro; pour une suite de r tendant vers l'infini, on aurait

$$N(r) > K_1 r^{\frac{h}{1+h}}$$

et d'après la formule de Jensen, la fonction serait au moins d'ordre $\frac{h}{1+h}$.

Il s'ensuit que toutes les fois que $n(x)$ sera assez régulier, on aura

$$\lim_{r=\infty} \frac{r\int_r^\infty n(x)\,dx/x^2}{\int_r^\infty n(x)\,dx/x} = 0 \tag{28}$$

et (26) aura lieu. Par exemple, pour les fonctions vérifiant la condition (22) du n° 15, on voit que le numérateur de l'expression (28) est

$$O(1)\,n(r) = O(1)\,X^{k(X)-1}\ ;$$

il suffit même que l'on ait seulement

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{X^{k(X)}} = 1$$

ce qui donne une majoration analogue du coefficient de θ dans (21), et que

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{X^{k(X)-1}} = \infty .$$

(à suivre).

NOTES

[3]) Voir HADAMARD, J.: Sur les fonctions entières. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **135**, pp. 1309-1311 (1902), et VALIRON G.: Sur le nombre des singularités transcendantes des fonctions inverses d'une classe d'algébroïdes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200**, pp. 713-715 (1935).

[4]) Voir VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière (thèse, Paris, Ed. Privat, Toulouse, 1912, paru dans *Annales Toulouse* (3), **5**, pp. 117-257 (1914); à ces résultats on comparera ceux de OSTROWSKI, A.: Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent, *Acta Mathematica*, **72**, pp. 99-257 (1940-1941), notamment les pp. 107, 110, 158, 166, 170 et 173, et OSTROWSKI, A.: Addition à notre mémoire: « Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent », *Acta Mathematica*, **75**, pp. 183-186 (1943), ainsi que ceux de REY PASTOR, J.: Lecciones de Algebra, pp. 89-105, 2e édition, Madrid, 1935, et SAN JUAN, R.: Compléments à la méthode de Graeffe pour la résolution des équations algébriques, *Bull. des Sci. Math.* (2), LIX, pp. 104-109 (1935), et: Complementos al método de Gräffe para la resolución de ecuaciones algébricas, *Revista Mat. Hispano-Americ.* (3), I, pp. 1-14 (1939), ainsi que: A propos du mémoire: « Recherches sur la méthode de Graeffe..., etc » par Alexandre OSTROWSKI, à Bâle, *Acta mathematica*, **75**, pp. 187-190 (1943).

[5]) Voir VALIRON, G.: Théorie des fonctions (p. 388). Masson, Paris, 1942.

[6]) Voir BRINKMEIER, H.: Ueber das Mass der Bestimmtheit des Wachstums einer ganzen transzendenten Funktion durch die absoluten Beträge der Koeffizienten ihrer Potenzreihe. *Math. Annalen*, **96**, pp. 108-118 (1927).

[7]) Voir VALIRON, G.: Sur la croissance des fonctions entières. *C. R. Assoc. française avanc. des Sci.*, Le Havre, 1929, pp. 110-113.

[8]) Pour l'introduction de ces notions dans la théorie des fonctions entières, voir VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre fini. *Bull. des Sciences math. (Darboux Bull.)* (2), **45**, pp. 258-270 (1921). La terminologie adoptée ici a été proposée par R. NEVANLINNA qui a étendu les résultats aux fonctions méromorphes.

[9]) On trouve dans VALIRON, G.: Lectures on the general theory of integral functions, Ed. Privat, Toulouse, 1928, Appendix B, p. 182, l'étude de la condition pour qu'une fonction donnée par sa série de Taylor soit de la classe divergente ou convergente.

[10]) Voir VALIRON, G.: *loc. cit.*, [5]), p. 432.

[11]) On a donc $n > |\alpha_n|^{\rho-\varepsilon}$

pour une suite infinie de n, ce qii entraîne la divergence

de la série $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_n|^{\rho-\varepsilon}}$ pour $\varepsilon > 0$,

de sorte que l'on a $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log n}{\log |\alpha_n|} = \rho$, c'est le théorème de Borel.

[12]) Voir VALIRON, G.: *loc. cit*, [4]). La réciproque a été retrouvée par TITCHMARCH, E. C.: On integral functions with real negative zeros, *Proc. London Math. Soc.* (2), **26**, pp. 185-200 (1927), dans le cas $U(r) = kr^\rho$ (voir TITCHMARCH, E. C.: The theory of functions, 2nd edition, x-452 pages, Oxford University Press, 1939). Dans une série de travaux récents (DELANGE, H.: Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs, *J. de Math. pures et appl.*, **31**, pp. 55-78 (1952)), H. DELANGE a repris ces questions et a étudié le cas de l'ordre entier. Voir aussi un mémoire de M. HEINS, M.: Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues. *Annals of Math.*, **49**, pp. 200-213 (1948).