Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

Autor: Godefroid, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34632

REMARQUE SUR LA FORMULE DE TAYLOR

par Michel GODEFROID, Montpellier

(Reçu le 13 février 1958.)

1. — Les hypothèses introduites pour établir la formule de Taylor avec le reste de Lagrange $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ comportent habituellement la continuité à droite de $f^{(n)}$ au point a. Or, s'il n'est pas possible de supprimer sans autre modification cette hypothèse pour $n = 0$ (formule des accroissements finis), nous allons voir qu'elle est superflue pour $n \geqslant 1$.

Ce résultat tient à ce que l'image d'un intervalle quelconque par une fonction dérivée de fonction continue est un intervalle, propriété qui remplacera celle de continuité. Nous traiterons d'abord la question plus générale de la formule de Taylor pour un intervalle ouvert, ce qui nous permettra de donner une extension valable même pour $n = 0$.

2. — Rappelons la notion de *valeur d'adhérence*; x_0 et λ étant finis, λ est valeur d'adhérence de f en $x_0 + 0$ (resp. $x_0 - 0$) si, quels que soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, on peut trouver dans l'intervalle $]x_0, x_0 + \eta[$ (resp. $]x_0 - \eta, x_0[$) un nombre x tel que $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$.

Extension du théorème de Rolle. Soit f une fonction continue dérivable dans $]a, b[$. Si 0 est valeur d'adhérence de f en $a + 0$ et en $b - 0$, il existe un nombre c tel que $f'(c) = 0$.

Adaptation facile de la démonstration classique.

Il est alors aisé d'adapter à un intervalle ouvert certaines démonstrations de la formule de Taylor en remplaçant les valeurs aux extrémités par des valeurs d'adhérence; par exemple, celle qui repose sur la formule des accroissements finis de Cauchy [1)].

Extension de la formule de Cauchy. Soient f_1 (resp. f_2) continue dans $[a\,,\,b]$ (resp.$]\,a\,,\,b\,[$) toutes deux dérivables dans $]\,a, b\,[$ et α (resp. β) une valeur d'adhérence finie de f_2 en $a + 0$ (resp. $b - 0$). Si $f_1(b) - f_1(a) \neq 0$ et si f_1' et f_2' ne s'annulent ni ne deviennent infinies simultanément, il existe un nombre c tel que

$$\beta - \alpha = [f_1(b) - f_1(a)]\,\frac{f_2'(c)}{f_1'(c)}\,\cdot$$

Démonstration en appliquant l'extension précédente du théorème de Rolle à la fonction

$$[f_2(x) - \alpha]\,[f_1(b) - f_1(a)] - [f_1(x) - f_1(a)]\,(\beta - \alpha)\ .$$

3. — *Formule de Taylor pour un intervalle ouvert.* — Soient a et b finis et f une fonction admettant une dérivée $n^{\text{ième}}$ continue et dérivable dans $]\,a\,,\,b\,[$. Si α (resp. β) est une valeur d'adhérence finie de f en $a + 0$ (resp. $b - 0$) et si $k_1, \ldots, k_n$ sont des valeurs d'adhérence finies de $f', \ldots, f^{(n)}$ en $a + 0$, il existe un nombre c tel que

$$\beta - \alpha = (b - a)\,k_1 + \frac{(b-a)^2}{2}\,k_2 + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n\,!}\,k_n + \\ + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,f^{(n+1)}(c)\ . \qquad (1)$$

Démontrons la formule par récurrence; elle est vraie pour $n = 0$ car il suffit d'appliquer l'extension ci-dessus de la formule de Cauchy aux fonctions f et x. Supposons-la vraie pour $n - 1$ et démontrons-la pour n $(n \geqslant 1)$.

Formons le quotient

$$\frac{\beta - \alpha - (b-a)\,k_1 - \cdots - \dfrac{(b-a)^n}{n\,!}\,k_n}{(b-a)^{n+1}}\ .$$

[1)] Voir M. Brelot, *Sur la formule de Taylor*. Annales de l'Université de Grenoble, section des Sc. math. et phys., XXI, p. 92, (1945). La démonstration donnée dans cet article suppose en fait la continuité à droite de $f^{(n)}$ au point a.

Si l'on pose

$$p(x) = f(x) - (x-a)k_1 - \cdots - \frac{(x-a)^n}{n!}k_n \quad \text{et} \quad q(x) = (x-a)^{n+1},$$

on voit que

$$\beta - (b-a)k_1 - \cdots - \frac{(b-a)^n}{n!}k_n \quad (\text{resp. } \alpha)$$

est une valeur d'adhérence de p en $b - 0$ (resp. en $a + 0$). De même, $(b - a)^{n+1}$ (resp. a) est valeur d'adhérence de q en $b - 0$ (resp. en $a + 0$). En appliquant l'extension de la formule de Cauchy, on voit donc qu'il existe un nombre d tel que le quotient précédent soit égal à

$$\frac{f'(d) - k_1 - \cdots - \dfrac{(d-a)^{n-1}}{(n-1)!}k_n}{(n+1)(d-a)^n}.$$

Mais, puisque f admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ continue dérivable dans $]\,a\,,\,b\,[$, f$'$ admet une dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ continue dérivable dans $]\,a\,,\,b\,[$, donc dans $]\,a\,,\,d]$. D'après l'hypothèse, on peut appliquer à f' la formule (1) à l'ordre $n - 1$ dans l'intervalle $]\,a\,,\,d\,[$ en prenant $f'(d)$ comme valeur d'adhérence de f' en $d - 0$. On obtient ainsi

$$f'(d) - k_1 - \cdots - \frac{(d-a)^{n-1}}{(n-1)!}k_n = \frac{(d-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$

et le quotient précédent est donc égal à

$$\frac{\dfrac{(d-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)(d-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

ce qui établit bien la formule (1) à l'ordre n.

De la propriété des dérivées rappelée au nº 1 on déduit en particulier que, si g admet dans $[\,a\,,\,b\,[$ une dérivée finie g', $g'(a)$ est valeur d'adhérence de g' en $a + 0$.

D'où le *corollaire :* Soit f continue dans $[a\,,\,b]$ fini et admettant dans $[\,a\,,\,b[$ des dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclusivement ($n \geqslant 1$), $f^{(n)}$ étant continue et dérivable dans $]\,a\,,\,b\,[$.

Nécessairement

$$\alpha = f(a)\ ,\ \beta = f(b)\ ,\ k_1 = f'(a)\ ,\ \ldots,\ k_{n-1} = f^{(n-1)}(a)\ ,$$

et, d'après ce que l'on vient de dire, on peut prendre $k_n = f_n(a)$.

La formule (1) se réduit ainsi à la formule classique

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) + \\ + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c)\ ,$$

mais on n'a pas supposé que $f^{(n)}$ soit continue à droite au point a, résultat annoncé au n° 1.