Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CONGRUENCES «W» DE WEINGARTEN
Autor: Maitre, Jean
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34631

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES CONGRUENCES « W » DE WEINGARTEN

par Jean MAITRE, Marseille.

(Reçu le 23 septembre 1957.)

Nous nous proposons, dans cet article, de montrer comment, grâce à l'introduction de notions et de notations appropriées, on peut grouper et présenter sous forme condensée certaines propositions fondamentales de la théorie des congruences W, puis d'appliquer les résultats à l'étude d'un problème de correspondance entre une surface W et les deux nappes de sa développée.

1. *Notations et rappels.* — Une congruence rectiligne (D) sera définie par la donnée d'une surface arbitraire (M) [surface de départ], et du vecteur unitaire N fixant la direction du rayon D issu du point courant M (u, v) de (M).

Les paramètres u et v sont supposés être ceux des développables de la congruence, et nous poserons

$$dN^2 = e du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2 . \tag{1}$$

(1) est la première forme fondamentale de la représentation sphérique de (D), c'est-à-dire de la sphère Σ, ayant pour centre un point fixe O, et décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{ON}$ issu de O équipollent au vecteur unitaire de D. Sur D, le foyer correspondant à la variation de u (de v) sera désigné par P (par P′), et la nappe focale correspondante par (P) [par (P′)]; les courbes de (M) sur lesquelles u varie seul seront dites courbes u, et de même pour les courbes v.

Les dérivées par rapport à u et v seront représentées par les indices 1 et 2 $\left(\frac{\partial M}{\partial u} = M_1, \frac{\partial M}{\partial v} = M_2, \frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} = M_{12}, \frac{\partial P}{\partial u} = P_1, \text{etc.}\right)$ et les produits mixtes de trois vecteurs (N, N_1, N_2), (P, P_1, P_2) ..., seront désignés par $\overline{NN_1 N_2}$, $\overline{PP_1 P_2}$, ...; en particulier nous poserons $\overline{NN_1 N_2} = \tau$. Si t et t' sont les abscisses des foyers P et P′

comptées à partir de M, on a

$$P = M + t N , \quad P' = M + t' N ,$$

et, d'après le choix des coordonnées

$$P_1 = \lambda N = M_1 + t_1 N + t N_1 ,$$
$$P'_2 = \lambda' N = M_2 + t'_2 N + t' N_2 ,$$

puis, comme on le voit aussitôt

$$P_2 = M_2 + t_2 N + t N_2 = [\lambda' + (t - t')_2] N + (t - t') N_2 ,$$
$$P'_1 = M_1 + t'_1 N + t' N_1 = [\lambda + (t' - t)_1] N + (t' - t) N_1 .$$

Pour une congruence (D) donnée, la quantité $(t - t') = \overline{P'P}$ ne dépend pas de (M); c'est un élément intrinsèquement lié à (D), qui jouera un rôle important dans la suite, et que nous représenterons par θ

$$\boxed{t - t' = \theta} .$$

Rappelons enfin que pour une surface quelconque (M) dont N désigne la normale unitaire, les coefficients des deux formes fondamentales

$$ds^2 = d M^2 = E\, du^2 + 2 F\, du\, dv + G\, dv^2 ,$$
$$N\, d^2 M = D\, du^2 + 2 D'\, du\, dv + D''\, dv^2 ,$$

sont liés par les équations de Gauss-Codazzi qui, dans le cas où les courbes coordonnées u, v sont lignes de courbure sur (M) [le seul que nous aurons à envisager dans la suite], et avec les notations adoptées, s'écrivent

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} D D'' = K E G , \text{ (Gauss)} , \\ 2 \dfrac{D_2}{E_2} = \dfrac{D}{E} + \dfrac{D''}{G} = 2 \dfrac{D''_1}{G_1} , \text{ (Codazzi)} , \end{cases}$$

(F et D′ sont nuls d'après le choix des courbes coordonnées).

Si l'on introduit la première forme fondamentale de la représentation sphérique de (M)

$$d N^2 = e\, du^2 + g\, dv^2 ,$$

et si l'on désigne par R et R′ les rayons de courbure principaux de (M) relatifs aux lignes de courbure u et v, on a

$$R = \frac{D}{e} = \frac{E}{D}, \qquad R' = \frac{D''}{g} = \frac{G}{D''},$$

et les équations de Codazzi peuvent s'écrire sous l'une ou l'autre des deux nouvelles formes

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} 2\,\dfrac{D_2}{e_2} = \dfrac{D}{e} + \dfrac{D''}{g} = \dfrac{2\,D''_1}{g_1}, \\[2ex] \dfrac{e_2}{e} = \dfrac{2\,R_2}{R' - R}, \qquad \dfrac{g_1}{g} = \dfrac{2\,R'_1}{R - R'}. \end{cases}$$

Ajoutons aussi les formules générales donnant les dérivées secondes M_{ij} en coordonnées curvilignes quelconques

$$\begin{cases} M_{11} = \Gamma_{11}^{1} M_1 + \Gamma_{11}^{2} M_2 + D\,N, \\ M_{12} = \Gamma_{12}^{1} M_1 + \Gamma_{12}^{2} M_2 + D'N, \\ M_{22} = \Gamma_{22}^{1} M_1 + \Gamma_{22}^{2} M_2 + D''N, \end{cases} \qquad (2)$$

où les Γ_{ij}^{k} sont les symboles classiques de Christoffel de la théorie des surfaces.

Pour une sphére (Σ) les deux formes fondamentales sont (comme il est d'ailleurs évident) opposées ($D = -E$, $D' = -F$, $D'' = -G$), et si cette sphère est celle qui porte la représentation sphérique de (M) [$E = e$, $F = o$, $G = g$], on a notamment les

$$(2') \quad N_{22} = \Gamma_{22}^{1} N_1 + \Gamma_{22}^{2} N_2 - g\,N,$$

symboles de Christoffel étant relatifs à la première forme de (Σ).

2. *Formes fondamentales des nappes focales d'une congruence rectiligne.* — Considérons par exemple la première nappe focale (P) de la congruence (D); sa première forme fondamentale est

$$d\,P^2 = (P_1\,du + P_2\,dv)^2$$

soit avec les notations du n° 1

$$d\,P^2 = \lambda^2\,du^2 + 2\,\lambda\,(\lambda' + \theta_2)\,du\,dv + [(\lambda' + \theta_2)^2 + \theta^2 g]\,dv^2.$$

La deuxième forme fondamentale de (P) a pour expression $n\,d^2\,P$, n étant le vecteur normal unitaire en P à (P), soit

$$n = \frac{P_1 \wedge P_2}{\sqrt{E\,G - F^2}},$$

où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale ci-dessus.

En remplaçant ces coefficients par leurs valeurs, on obtient

$$n = \frac{P_1 \wedge P_2}{\lambda \theta \sqrt{g}},$$

et par suite

$$n\, d^2 P = \frac{(P_1 \wedge P_2)\, d^2 P}{\lambda \theta \sqrt{g}} = \frac{\overline{P_1 P_2 P_{11}}\, du^2 + 2\overline{P_1 P_2 P_{12}}\, du\, d\varphi + \overline{P_1 P_2 P_{22}}\, d\varphi^2}{\lambda \theta \sqrt{g}}.$$

Les quantités P_{11}, P_{12}, P_{22} se calculent sans difficulté.

On déduit des expressions de P_1, P_2 données au n° 1, après y avoir posé $t - t' = \theta$

$$P_{11} = \lambda_1 N + \lambda N_1 ,$$
$$P_{12} = \lambda_2 N + \lambda N_2 ,$$
$$P_{22} = (\lambda' + \theta_2)_2 N + (\lambda' + \theta_2) N_2 + \theta N_{22} ,$$

en outre, si l'on introduit la représentation sphérique de la congruence (D) sur la sphère Σ de centre O et de rayon 1 définie au n° 1, et si l'on observe que le vecteur unitaire normal à Σ en l'un quelconque N de ses points n'est autre chose que $\overrightarrow{ON}$, on a pour N_{22} l'expression (2′), et de là résultent aussitôt, pour $\overline{P_1 P_2 P_{11}}$, ... les expressions

$$\overline{P_1 P_2 P_{11}} = \overline{(\lambda N)(\theta N_2)(\lambda N_1)} = -\lambda^2 \theta \tau ,$$
$$\overline{P_1 P_2 P_{12}} = 0$$
$$\overline{P_1 P_2 P_{22}} = \overline{(\lambda N)(\theta N_2)(\theta N_{22})} = -\lambda \theta^2 \tau \Gamma_{22}^{1} ,$$

et par suite

$$n\, d^2 P = -\frac{\lambda \tau}{\sqrt{g}} du^2 - \frac{\theta \tau}{\sqrt{g}} \Gamma_{22}^{1} d\varphi^2 .$$

La deuxième forme fondamentale de (P′) se déduit de celle de (P) en y remplaçant n, λ, τ, g, du, θ, Γ_{22}^{1}, $d\varphi$ respectivement par n', λ', $-\tau$, e, $d\varphi$, $-\theta$, Γ_{11}^{2}, du:

$$n'\, d^2 P' = -\frac{\theta \tau}{\sqrt{e}} \Gamma_{11}^{2} du^2 + \frac{\lambda' \tau}{\sqrt{e}} d\varphi^2 .$$

3. *Congruences* W. — Ce sont les congruences pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales (P) et (P′). Il faut et il suffit pour cela que les deuxièmes formes fondamentales de (P) et (P′) soient proportionnelles, ce qui s'exprime par la condition

$$\lambda\lambda' + \theta^2 \Gamma_{22}{}^1 \Gamma_{11}{}^2 = 0 \ . \tag{3}$$

Cette condition peut se mettre sous une forme remarquable, ne mettant en jeu que le seul vecteur $\sigma = \overrightarrow{P'P} = \theta N$.

On a, en effet

$$\sigma = \theta N \ , \quad \sigma_1 = \theta_1 N + \theta N_1 \ , \quad \sigma_2 = \theta_2 N + \theta N_2 \ ,$$

et, par suite, en tenant compte de l'expression de N_{22} donnée au n° 2

$$\sigma_{11} = \theta_{11} N + 2\,\theta_1 N_1 + \theta\,(\Gamma_{11}{}^1 N_1 + \Gamma_{11}{}^2 N_2 - e\,N) \ ,$$
$$\sigma_{12} = \theta_{12} N + \theta_1 N_2 + \theta_2 N_1 + \theta\,(\Gamma_{12}{}^1 N_1 + \Gamma_{12}{}^2 N_2 - f\,N) \ ,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{11}} = \theta^3 \tau \Gamma_{11}{}^2 \ , \quad \overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{12}} = \theta^2 \tau \lambda \ .$$

On tire de là les expressions de λ et de $\Gamma_{11}{}^2$

$$\lambda = \frac{\overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{12}}}{\theta^2 \tau} \ , \quad \Gamma_{11} = \frac{\overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{11}}}{\theta^3 \tau} \ ;$$

celles de λ' et de $\Gamma_{22}{}^1$ en résultent

$$\lambda' = \frac{\overline{\sigma\,\sigma_2\,\sigma_{12}}}{-\,\tau\,\theta^2} \ , \quad \Gamma_{22}{}^1 = \frac{\overline{\sigma\,\sigma_2\,\sigma_{22}}}{\theta^3 \tau} \ ,$$

et en remplaçant λ, λ', $\Gamma_{22}{}^1$, $\Gamma_{11}{}^2$ par les expressions précédentes dans (3), on obtient la forme annoncée de la condition pour qu'une congruence rapportée à ses développables appartienne au type W

$$\overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{11}} \ \ \overline{\sigma\,\sigma_2\,\sigma_{22}} - \overline{\sigma\,\sigma_1\,\sigma_{12}} \ \ \overline{\sigma\,\sigma_2\,\sigma_{12}} = 0 \ . \tag{4}$$

Appliquons ce dernier résultat aux congruences formées par les normales à une surface (M), pour lesquelles la distance $\theta = \overline{PP'}$ des couples de foyers associés est une constante que nous supposerons égale à *un*. Ces congruences sont les congruences

pseudosphériques normales; leurs nappes focales sont des surfaces *(pseudosphériques)* de même courbure totale constante (— 1), et l'on sait que sur ces nappes les asymptotiques se correspondent (les congruences sont W). Le caractère W des congruences envisagées est une conséquence de la relation générale (4). On a ici

$$\sigma = N \ , \quad \sigma_1 = N_1 \ , \quad \sigma_2 = N_2 \ ,$$

d'où l'on déduit $\sigma^2 = 1$, et, comme les courbes u, v de (M) sont lignes de courbure, donc de mêmes directions en chaque point que leurs représentations sphériques:

$$\sigma_1 \sigma_2 = N_1 N_2 = 0 \ .$$

Le premier membre de (4) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 & \sigma\sigma_1 & \sigma\sigma_{11} \\ \sigma\sigma_2 & \sigma_1\sigma_2 & \sigma_{11}\sigma_2 \\ \sigma\sigma_{22} & \sigma_1\sigma_{22} & \sigma_{11}\sigma_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma^2 & \sigma\sigma_2 & \sigma\sigma_{12} \\ \sigma\sigma_1 & \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1\sigma_{12} \\ \sigma\sigma_{12} & \sigma_2\sigma_{12} & \sigma_{12}^2 \end{vmatrix} ;$$

dans le cas actuel où $\sigma^2 = 1$, $\sigma_1 \sigma_2 = 0$ il se réduit à

$$(\sigma_1 \sigma_{22})(\sigma_2 \sigma_{11}) - (\sigma_2 \sigma_{12})(\sigma_1 \sigma_{12}) \ ,$$

et cette quantité est nulle, conformément au résultat annoncé, comme le montre la relation $\sigma_1 \sigma_2 = 0$ dérivée par rapport à u et par rapport à v.

4. *Le théorème d'Halphen-Bianchi.* — Revenons aux congruences W générales. L'angle φ des plans focaux [des normales en P et P′ à (P) et (P′)] est défini par

$$\sin \varphi = \frac{\tau}{\sqrt{eg}} \ ,$$

et l'on sait que si L et L′ sont les points limites sur un rayon quelconque, on a

$$\overline{L'L} = \frac{\overline{P'P}}{\sin \varphi} = \frac{\theta}{\sin \varphi} \ .$$

Le calcul de la courbure totale K de la nappe (P) en P donne

$$K = \frac{\tau^2}{\theta g^2 \lambda} \Gamma_{22}^1 \ ;$$

et l'on a de même pour la deuxième nappe

$$K' = -\frac{\tau^2}{\theta e^2 \lambda'} \Gamma_{11}^2 .$$

Si l'on tient compte de la relation (3) caractéristique des congruences W, on voit que

$$K K' = \left(\frac{\tau}{\theta \sqrt{eg}}\right)^4 = \frac{\sin^4 \varphi}{\theta^4} = \frac{1}{L' L^4} .$$

Cette égalité traduit le théorème de Bianchi, que Halphen avait établi pour les congruences W normales.

5. *Surfaces* W. — Ce sont les surfaces (M) dont les normales forment une congruence W. Avec les notations qui précèdent, l'une quelconque de ces surfaces se trouve rapportée à ses lignes de courbure, et si l'on pose $t = \overline{MP} = R$ et $t' = \overline{MP'} = R'$ (R et R' étant les deux rayons de courbure principaux relatifs au point M), on a pour la nappe focale (P)

$$P = M + R N , \quad P_1 = R_1 N , \quad P_2 = R_2 N - \theta N_{22} ,$$

et par suite

$$d P^2 = R_1^2 du^2 + 2 R_1 R_2 du\, dv + (R_2^2 + g \theta^2) dv^2 .$$

Des équations (II) de Codazzi où $R - R' = t - t'$ est remplacé par θ, on déduit aussitôt

$$R_2 R'_1 + \frac{\theta^2 e_2 g_1}{4 eg} = 0 ;$$

et si l'on tient compte de ce qu'ici $\lambda = R_1$, $\lambda' = R_2$, et si l'on remplace dans (3) les symboles de Christoffel par leurs valeurs, on a aussi

$$R_1 R'_2 + \frac{\theta^2 e_2 g_1}{4 eg} = 0 .$$

Des deux équations précédentes, on déduit la relation

$$\frac{D (R, R')}{D (u, v)} = 0 ,$$

qui traduit le théorème de Ribaucour suivant lequel, pour qu'une surface soit W, *il faut et il suffit qu'il existe une relation*

fixe entre ses deux rayons de courbure principaux, et d'où l'on déduit aussitôt, moyennant l'intégration des dernières équations (II) de Codazzi, le théorème de WEINGARTEN suivant lequel les nappes focales des congruences W normales *sont applicables sur des surfaces de révolution*, les arêtes de rebroussement des développables étant les déformées des méridiennes.

6. *Surfaces* (M) *pour lesquelles les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la développée.* — Avec les notations adoptées, les lignes de courbure de la nappe (P) sont définies par l'équation

$$\overline{(dP)\,(N_1)\,(dN_1)} = 0 \ ,$$

qui. développée en tenant compte de $P_1 = R_1 N$, $P_2 = R_2 N$, $N_{11} = \Gamma_{11}^1 N_1 + \Gamma_{11}^2 N_2 - eN$, $N_{12} = \Gamma_{12}^1 N_1 + \Gamma_{12}^2 N_2$ s'écrit

$$R_1 \Gamma_{11}^2 du^2 + (R_1 \Gamma_{12}^2 + R_2 \Gamma_{11}^2 + \theta e)\, du\, dv + R_2 \Gamma_{12}^2 dv^2 = 0 \ ,$$

ou encore

$$- R_1 e_2 du^2 + (R_1 g_1 - R_2 e_2 + 2\,\theta e g)\, du\, dv + R_2 g_1 dv^2 = 0 \ .$$

L'équation des lignes de courbure de (P′) est de même

$$- R'_1 e_2 du^2 + (R'_1 g_1 - R'_2 e_2 + 2\,\theta e g)\, du\, dv + R'_2 g_1 dv^2 = 0 \ ,$$

et la correspondance des lignes de courbure s'exprime par la proportionnalité des coefficients des deux équations précédentes.

Il y a lieu d'envisager deux cas suivant que $e_2 g_1 \neq 0$ ou que l'une des deux quantités e_2, g_1 est nulle.

A. Supposons $e_2 g_1 \neq 0$. — La proportionnalité indiquée se traduit par les deux relations

$$\frac{R_1}{R'_1} = \frac{R_2}{R'_2} = 1 \ ,$$

d'où l'on déduit immédiatement:

1° que la surface (M) est du type W,

2° que $\theta = R - R'$ est une constante.

Les surfaces pour lesquelles la distance θ de deux centres de courbure associés quelconques est constante sont bien connues,

et l'on sait que les deux nappes (P) et (P′) de leurs développées sont des surfaces à courbure totale constante $K = K' = -\frac{1}{\theta^2}$, ce qui résulte d'ailleurs aussitôt de l'expression de K du n° 4.

B. Si, par exemple, $e_2 = 0$, les courbes u de (P) sont lignes de courbure, et il en est de même des courbes u de (P′). Les courbes v de (P) et (P′) conjuguées des u sont par suite aussi lignes de courbure sur (P) et (P′), et il y aurait correspondance des lignes de courbure sur les trois surfaces (M), (P) et (P′); nous verrons au numéro suivant que cela *ne peut avoir lieu.*

7. *Correspondance des lignes de courbure entre une surface et une nappe de sa développée.* — Cherchons les surfaces (M) pour lesquelles les lignes de courbure (u, v) se correspondent sur (M) et sur la nappe (P) de sa développée. Les courbes u de (P) correspondant aux courbes u de (M) sont géodésiques, et comme elles sont lignes de courbure, elles sont *planes.* Or il est bien connu que les surfaces admettant une famille de lignes géodésiques u planes sont les *surfaces moulures*, engendrées par une courbe de forme et de grandeur invariable C (profil), dont le plan π roule sans glisser sur une développable fixe (Δ) (base). Les surfaces (M) cherchées sont donc des surfaces moulures; mais il y a lieu de distinguer le cas où (M) est une surface moulure à profil curviligne quelconque, de celui où le profil est soit une droite, soit un cercle.

Toute surface moulure rentrant dans le premier cas fournit une solution du problème envisagé, car si u et v sont les paramètres qui fixent respectivement un point quelconque du profil C et la position de son plan π, les courbes (u, v), qui sont lignes de courbure sur (M), le sont aussi sur la nappe (P) de sa développée, puisque celles-ci sont non seulement conjuguées mais orthogonales, car lorsque v varie, le plan π roule sans glisser sur son enveloppe (Δ), et tout point de C décrit une courbe orthogonale à C. (P) est d'ailleurs une surface moulure ayant la même base que (M) et pour profil la développée de C dans π.

Il convient d'ailleurs d'observer que sur (M) et sur la deuxième nappe (P′) de sa développée, qui n'est autre que (Δ), les lignes de courbure ne se correspondent pas. Aux profils C de (M) cor-

respondent les génératrices rectilignes de la base développable Δ, qui sont bien lignes de courbure pour (Δ); mais on voit aussitôt que les lignes de courbure de la deuxième famille de (Δ), qui sont les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, ne peuvent correspondre à celles de la deuxième famille de (M) que si (Δ) se réduit à un cylindre, et alors (P) serait rejetée à l'infini.

Dans le cas particulier où C est une droite, (P) est rejetée à l'infini, et la correspondance entre (M) et (P) n'existe plus à proprement parler. Cependant, si l'on suppose que (Δ) est un cylindre, C étant parallèle aux génératrices du cylindre, (M) est elle-même une surface cylindrique, et il suffit d'associer (M) et (Δ) pour retrouver la correspondance des lignes de courbure.

Le cas où C est un cercle est à rejeter, car alors (P) se réduit à une courbe (lieu du centre du cercle lorsque π roule sur (Δ)).

Les surfaces (M) dont les lignes de courbure correspondent aux lignes de courbure de l'une des nappes de leur développée sont donc:

a) Les surfaces moulures à profil curviligne C non circulaire: la correspondance ayant lieu entre (M) et la nappe (P), lieu de la développée de C, et à l'exclusion de l'autre nappe qui est la développable base (Δ).

b) Les surfaces (M) cylindriques, qui correspondent avec conservation des lignes de courbure aux nappes (cylindriques) de leurs développées situées à distance finie.

L'étude qui précède nous montre que la correspondance des lignes de courbure entre une surface (M) et sa développée, ne peut affecter que l'une seulement des deux nappes (P), (P′) de la développée, et que par suite *il n'existe pas* de surfaces (M) pour lesquelles il y a correspondance des lignes de courbure entre (M), (P) et (P′).

Il résulte de là, conformément à ce qui a été dit au n° 6, que le problème de la recherche des surfaces (M), pour lesquelles il y a correspondance des lignes de courbure entre les deux nappes de leurs développées, ne comporte que la seule solution (correspondant au cas A du n° cité) constituée par les surfaces du type W pour lesquelles $R - R' = \text{const}$. Le cas B est en effet à rejeter puisque, comme on l'a fait observer au n° 6, il impliquerait

l'existence de surfaces (M) pour lesquelles il y aurait correspondance des lignes de courbure sur (M), (P) et (P′), ce qui est impossible d'après ce que l'on vient de voir.

8. *Surfaces* W *dont les lignes de courbure correspondent aux lignes de courbure d'une nappe de la développée.* — La correspondance des lignes de courbure entre les surfaces (P) et (P′) du triple [(M), (P), (P′)] entraîne l'appartenance de (M) à la famille des surfaces W. Mais cette conclusion n'est plus valable pour les deux couples restants (M), (P) ou (M), (P′). Demandons-nous quelles sont les surfaces (M) du type W pour lesquelles il y a correspondance entre leurs lignes de courbure et celles de l'une (P) des deux nappes de leur développée.

Il s'agit, d'après ce qui précède, de rechercher les surfaces moulures du type W. Laissons de côté les solutions évidentes constituées par les surfaces moulures à profils rectilignes ou circulaires (pour lesquelles la relation caractéristique des surfaces W dégénère en $R = \infty$ ou $R = \text{const.}$), et plaçons-nous dans le cas général où il existe une relation de la forme $f(R, R') = 0$ entre $\overline{MP} = R$ et $\overline{MP'} = R'$. Fixons u; M est donc fixe sur le profil C de M; R, rayon de courbure de C en M, reste donc constant lorsque le plan π de C roule sur la développable (Δ), et il en est par suite de même de $R' = \overline{MP'}$. Or, lorsque π roule sans glisser sur (Δ), P′ décrit une certaine courbe Γ de (Δ), et M décrit une développante de Γ.

L'invariance de la longueur P′ M montre que Γ *se réduit à un point.* La développable (Δ), lieu de ce point lorsque u varie, se réduit donc à une courbe, et est par suite une droite Δ: la surface moulure (M) *se réduit donc à une surface de révolution autour de* Δ. Toute surface (M) de révolution donne d'ailleurs une solution du problème envisagé, et la correspondance entre (M) et sa développée (qui est aussi de révolution) associe les méridiennes et les parallèles des deux surfaces.

9. *Remarque relative à la déformation des surfaces de révolution.* — Regardons une surface de révolution générale (P) (non réduite à un cône ou à un cylindre) comme la développée d'une surface (M) du type W, et soient P et M deux points correspon-

dants quelconques sur (P) et (M) [M est situé sur la tangente en P à la méridienne de (P)]. Déformons (P) au sens de Gauss, et supposons les tangentes aux différentes méridiennes et les points M correspondants entraînés dans la déformation. Dans chaque configuration (M) est une surface W, mais dès que (P) quitte la forme révolutive, il cesse, d'après ce qui précède, d'y avoir correspondance entre les lignes de courbure de (P) et celles de (M). On ne retrouve cette correspondance que si, au cours de sa déformation, (P) *peut reprendre la forme révolutive*, ce qui, comme il est bien connu, est possible de ∞^1 façons différentes. De là résulte qu'il existe ∞^1 déformations d'une surface de révolution conservant les lignes de courbure, et que ces déformations sont celles *qui transforment la surface en une nouvelle surface de révolution et celles-là seulement.*

Le cas des surfaces de révolution coniques ou cylindriques se distingue du cas général par le fait, qu'outre les ∞^1 surfaces coniques (ou cylindriques) de révolution, qui sont toutes applicables sur un cône (ou un cylindre) donné, il existe une infinité de surfaces (non de révolution) dépendant d'une fonction arbitraire, déformées du cône (ou du cylindre) envisagé avec conservation des lignes de courbure, à savoir tous les cônes (ou tous les cylindres).

Pour un plan (P) (surface à lignes de courbure indéterminées) considéré comme un cône (ou un cylindre) de révolution particulier, il convient d'ajouter aux déformations précédentes celles que l'on obtient en soumettant (P) à une déformation *arbitraire*: si (Δ) est une développable quelconque déformée de (P), et si l'on envisage sur (P) le réseau orthogonal correspondant aux lignes de courbure de (Δ), l'application de (P) sur (Δ) transforme ce dernier réseau [qui est de courbure sur (P)] en le réseau de courbure de (Δ).

Une circonstance analogue se présente pour une sphère Σ (de rayon a). Une telle surface, outre les ∞^1 surfaces de révolution du cas général admet comme déformations conservant l'un de ses réseaux de courbure toutes les déformations qui l'appliquent sur une surface quelconque à courbure totale constante $K = \frac{1}{a^2}$.