

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR CERTAINES SÉRIES A VALEUR IRRATIONNELLE
Autor: Erdös, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34629>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR CERTAINES SÉRIES A VALEUR IRRATIONNELLE

par Paul ERDÖS, Birmingham-Haïfa

(*Reçu le 1^{er} avril 1958*)

§ 1. En décembre 1956, à Birmingham, le professeur A. Oppenheim (Singapour) m'a posé le problème suivant. Soit p_n , $n = 1, 2 \dots$, la suite des nombres premiers, la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^k}{n!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

est-elle irrationnelle ?

A ce sujet, je rappellerai le fait connu [1] que tout réel t , $0 < t \leq 1$, peut s'exprimer d'une et une seule manière sous la forme

$$t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

avec $0 \leq c_n < n$ pour tout n et $c_n > 0$ pour une infinité de valeurs de n , et que t est rationnel si et seulement si

$$c_n = n - 1 \quad \text{pour tout} \quad n \geq n_0.$$

Dans notre cas, ce théorème n'est pas applicable, puisque $p_n > n$ pour tout n . Toutefois la somme des séries (1) est bien irrationnelle; la démonstration étant assez compliquée pour $k > 1$, je ne donnerai au § 2 que la démonstration pour $k = 1$. Par contre, je démontrerai au § 3 un théorème qui généralise cette affirmation, les dénominateurs dans (1) étant remplacés par les produits des termes d'une suite croissante d'entiers quelconques.

Enfin, je tiens à souligner que je n'ai pas réussi à démontrer l'irrationnalité de la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n 2^n}.$$

Pour ce qui concerne l'irrationnalité des séries semblables, voir [2].

§ 2. La démonstration de l'irrationnalité de la série (1) repose sur le fait que l'ensemble des nombres

$$\frac{p_n}{n} - \left[\frac{p_n}{n} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

est dense dans l'intervalle $(0, 1)$, ce que nous démontrerons à la fin de ce paragraphe.

Ceci posé, supposons par l'absurde que la valeur de la série (1), pour $k = 1$, est rationnelle, c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} = \frac{a}{b}$$

avec a et b entiers.

Soit $k > b$; il est alors évident que

$$\frac{p_k}{k} + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+2)} + \dots = (k-1)! \frac{a}{b}$$

est un entier positif et par suite

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k} \right] + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \dots \geq 1.$$

Puisque la suite $\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k} \right]$ est dense dans $(0, 1)$ il existe une infinité de k tels que

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k} \right] \leq \frac{1}{2};$$

on aura donc pour ces valeurs de k ,

$$\frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+2)} + \dots \geq \frac{1}{2}.$$

Or cette inégalité ne peut avoir lieu pour k suffisamment grand puisque $p_k = o(k^2)$, notre affirmation est ainsi démontrée.

Remarquons que nous avons incidemment démontré la proposition générale suivante:

Soit c_n une suite d'entiers > 0 tels que

$$n^{-2} c_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

toutes les fois que la suite

$$\frac{c_n}{n} - \left\lfloor \frac{c_n}{n} \right\rfloor \quad (3)$$

ne tend pas vers l'unité, la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

est irrationnelle.

Ainsi, il suffit d'établir que la suite (3) ne tend pas vers l'unité; or, pour $c_n = p_n$, on peut même montrer que la suite (2) est dense dans $(0, 1)$, mais on est obligé de recourir au théorème des nombres premiers avec l'évaluation suivante du reste [3; pp. 46-51, 193-197, 238-242, 328-333]

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \quad x \rightarrow \infty;$$

aussi il y aurait intérêt à voir si l'on peut obtenir une démonstration plus élémentaire.

Quant à la démonstration du fait que la suite (2) est dense dans $(0, 1)$ on peut le déduire de la proposition connue [4; p. 17, Aufgaben 100-102]:

la suite

$$a_n - [a_n], \quad n = 1, 2, \dots,$$

est dense dans $(0, 1)$ si

$$a_n \rightarrow \infty$$

et

$$a_{n+1} - a_n < o(1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Pour vérifier cette dernière condition dans le cas où $a_n = \frac{p_n}{n}$, du fait que

$$\frac{p_{n+1}}{n+1} - \frac{p_n}{n} < \frac{p_{n+1} - p_n}{n},$$

il suffit de montrer que

$$p_{n+1} - p_n < o(n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Or, de

$$\begin{aligned} 1 = \pi(p_{n+1}) - \pi(p_n) &= \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{p_{n+1}}{\log^2 p_{n+1}}\right) + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right) > \\ &> \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_{n+1}} + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right), \end{aligned}$$

il résulte

$$p_{n+1} - p_n < \log p_{n+1} + o\left(\frac{p_n \log p_{n+1}}{\log^2 p_n}\right) = o\left(\frac{\log p_n}{p_n}\right),$$

et puisque $p_n \sim n \log n$, $n \rightarrow \infty$, l'affirmation en découle.

§ 3. L'extension mentionnée de la proposition précédente exige une évaluation encore plus précise du reste dans le théorème des nombres premiers et qui est donnée par

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^r x}\right), \quad (4)$$

quel que soit $r > 0$. En outre, contrairement au cas traité au § 2, la démonstration de ce théorème utilise pleinement le fait que les p_n sont premiers.

THÉORÈME. — Soit $1 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n \leq \dots$ une suite d'entiers telle que pour un certain $k > 0$ on ait

$$q_n > o\left(\frac{n}{\log^k n}\right), \quad (5)$$

et p_n la suite des nombres premiers; alors la somme t de la série

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \quad (6)$$

est rationnelle si et seulement si

$$q_n = q p_n + 1$$

pour un entier $q \geq 1$ fixe et tout $n \geq n_0$.

DÉMONSTRATION. — Posons

$$t q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + r_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où, d'après (6), les N_n sont des entiers et

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots$$

Alors, d'après (5),

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + o\left(\frac{p_n}{q_n}\right), \quad (7)$$

puisque $p_n \sim n \log n$; d'autre part

$$r_{n+1} - r_n < o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

par le fait que

$$r_{n+1} - r_n < \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \dots$$

et que, d'après un calcul analogue à celui du paragraphe précédent, la relation (4), avec $r = k + 2$, entraîne

$$p_{n+1} - p_n = o(n \log^{-k} n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Ceci établi, montrons en premier lieu qu'aucun des points d'accumulation de la suite p_n/q_n ne peut être à valeur irrationnelle. A cet effet, supposons par l'absurde qu'on puisse extraire une suite partielle p_m/q_m , $m = n_i$, $i = 1, 2, \dots$, qui tende vers un nombre irrationnel α . Dans ce cas, on aurait, d'après (7),

$$t q_1 q_2 \cdots q_{m-1} = N_m + \frac{p_m}{q_m} + o\left(\frac{p_m}{q_m}\right) = N_m + \alpha + o(1),$$

ce qui est impossible lorsque t est rationnel.

En second lieu, montrons que la suite p_n/q_n ne peut avoir deux points d'accumulation distincts. En effet, si u et v étaient

deux tels points, puisque d'après (5) et (9),

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} = o(1),$$

il résulterait que tous les points situés entre u et v seraient des points d'accumulation [4; p. 17, Aufgaben 100-102], ce qui est en contradiction avec le fait démontré plus haut.

En troisième lieu, montrons que p_n/q_n tend nécessairement vers une limite finie. A cet effet, supposons par l'absurde que la suite p_n/q_n ne reste pas bornée; n'ayant qu'un seul point d'accumulation, cette suite, et par suite r_n , devrait tendre vers l'infini. Or, d'après (8) et la proposition citée au § 2, la suite $r_n - [r_n]$ serait dense dans $(0, 1)$; il existerait donc une suite d'indices $n_i = m$ telle que

$$r_m - [r_m] \rightarrow \beta,$$

avec β irrationnel, et l'on aurait

$$t q_1 q_2 \cdots q_{m-1} = N_m + [r_m] + r_m - [r_m] = N_m + [r_m] + \beta + o(1),$$

ce qui est impossible pour t rationnel.

Ainsi, on peut poser

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{c}{q} + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

avec c et q entiers, et tels que $(c, q) = 1$ si $c \geq 1$, ou bien q arbitraire $\neq 0$ si $c = 0$, et, d'après (7), on obtient

$$r_n = \frac{c}{q} + o(1).$$

Par suite,

$$t q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q} + o(1),$$

et cette relation ne peut avoir lieu pour les grandes valeurs de n que si

$$t q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q},$$

pour tout $n \geq n_0$. Il s'en suit que, pour $n \geq n_0$,

$$r_n = \frac{c}{q} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{c}{qq_n} + o\left(\frac{1}{q_n}\right),$$

d'où

$$cq_n = qp_n + c + o(1).$$

Or cette relation ne pouvant avoir lieu non plus que si

$$cq_n = qp_n + c$$

à partir d'un certain n , il en découle que $c \geq 1$, et, puisque $(c, q) = 1$ et p_n est premier, il faut que $c = 1$; on a donc

$$q_n = qp_n + 1$$

pour un $q \geq 1$ fixe et à partir d'un n suffisamment grand.

C.q.f.d.

Je remarquerai enfin que la borne inférieure de la croissance des q_n , donnée par (5), n'est pas la plus précise possible et qu'elle dépend de l'évaluation du reste du théorème des nombres premiers. D'après Tatuzawa [5], le résultat le plus précis connu jusqu'à présent est

$$\pi(x) = \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right),$$

avec

$$\varphi(x) = \exp\left(-a(\log x)^{\frac{4}{7}}(\log \log x)^{-\frac{3}{7}}\right)$$

et où a est une constante positive, ce qui permet de remplacer (5) par

$$q_n > O\left(n \log^2 n / \varphi(n)\right).$$

Toutefois, il est fort probable que le théorème reste vrai sous l'unique hypothèse

$$1 < q_1 \leq q_2 \leq \dots;$$

mais, déjà, le cas où $q_n = 2, n = 1, 2, \dots$, m'échappe entièrement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. CANTOR, Ueber die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschr. für Math. u. Phys.*, **14**, pp. 121-128 (1869) et *Gesammelte Abhand.*, Berlin, 1932, pp. 35-42.
- [2] P. ERDÖS, On the irrationality of certain series. *Indag. Math.*, **19**, pp. 212-219 (1957).
- [3] E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1909).
- [4] G. POLYA und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1954)).
- [5] T. TATUZAWA, On the number of the primes in an arithmetic progression. *Jap. Journ. of Math.*, **21**, pp. 93-111 (1951).