Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXISTENCE D'UN CERCLE PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor: Schinzel, André

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34627

SUR L'EXISTENCE D'UN CERCLE PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

par André SCHINZEL, Varsovie

(Reçu le 29 janvier 1958.)

Le but de cette Note est de démontrer ce

THÉORÈME: *Quel que soit le nombre naturel* n, *il existe dans le plan un cercle dont la circonférence contient précisément* n *points aux coordonnées entières.*

(Ce théorème a été mentionné dans l'article de M. W. SIERPIŃSKI paru dans ce fascicule, page 25.)

Démonstration. — Pour n impair, $n = 2k + 1$, où k est un entier $\geqslant 0$, le cercle au centre $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et au rayon $5^k/3$ satisfait à notre théorème.

En effet, d'après un théorème connu sur le nombre de décompositions en deux carrés, l'équation $x^2 + y^2 = 5^{2k}$ a $4\,(2k + 1)$ solutions en nombres entiers x et y. Comme $5^{2k} \equiv 1 \pmod{3}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, on démontre sans peine que dans chaque telle solution, un et un seul des nombres x et y est divisible par 3. Les solutions se divisent donc en $2k + 1$ quadruples disjoints: (x, y), $(x, -y)$, (y, x), $(-y, x)$, où x est un entier divisible par 3 et y un entier qui n'est pas divisible par 3. Dans chaque tel quadruple, une et une seule solution satisfait à la condition que le premier terme de la paire $\equiv -1 \pmod{3}$ et le second $\equiv 0 \pmod{3}$. Il existe donc précisément $2k + 1 = n$ solutions en nombres entiers z et t de l'équation $(3z - 1)^2 + (3t)^2 = 5^{2k}$, c'est-à-dire de l'équation $\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{5^k}{3}\right)^2$. Cela prouve qu'il existe précisément n points aux coordonnées entières sur le cercle déterminé par cette équation, ce qui démontre notre théorème pour n impair.

Pour n pair, $n = 2k$, où k est un nombre naturel, le cercle au centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et au rayon $5^{\frac{k-1}{2}}/2$ satisfait à notre théorème. En effet, d'après le théorème mentionné plus haut, l'équation $x^2 + y^2 = 5^{k-1}$ a précisément $4k$ solutions en nombres entiers x et y. Or, des nombres x, y, un et un seul est pair et ainsi toutes les solutions se divisent en $2k$ paires disjointes (x, y) et (y, x) qui ne diffèrent entre elles que par l'ordre de leurs termes. Dans chaque telle paire précisément une solution satisfait à la condition que le premier élément est impair et le second pair. Il existe donc précisément $2k = n$ solutions en nombres entiers z, t de l'équation $(2z - 1)^2 + (2t)^2 = 5^{k-1}$, c'est-à-dire à l'équation $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2}\right)^2$, ce qui démontre notre théorème pour n pair.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.