Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A' $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = -\, \bar{g}_{0\alpha}\, d' x^\alpha \,.$$

On en déduit

$$d' x^0 = dx^0 + 2\, \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \,.$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A' $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \,. \tag{11.1}$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}\,(dx^0)^2 + 2\,\frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,\beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \\ - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,(\beta_i\, dx^i)^2 \,. \tag{11.2}$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\,\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum_i (dx^i)^2$. Il vient

$$(11.3)\qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2-\beta^2+(1-V^2)(\beta_i\lambda^i)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}(\beta_i\lambda^i) \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2-\beta^2+(1-V^2)(\beta_i\lambda^i)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}(\beta_i\lambda^i)\,.$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(11.4)\qquad 1-\beta^2-(1-\beta^2)W^2-(1-V^2)(1-W\beta_i\lambda^i)^2 = 0\,.$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$(11.5)\qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2}[\vec{\beta}^2 + 2\,\vec{W}\,.\,\vec{\beta} + (1-\beta^2)\,\vec{W}^2 + (\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2]\,.$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$(11.6)\qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta})^2}\left[\left(1+\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W}-\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}\left[\left(1+\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W}-\frac{\vec{W}\,.\,\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]\,.$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

---

[4] Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.