Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A′ $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = -\, \bar{g}_{0\alpha}\, d'\, x^\alpha \, .$$

On en déduit

$$d'\, x^0 = dx^0 + 2\, \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \, .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^1) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A′ $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de Minkowski, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$(11.1) \qquad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \, .$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

$$(11.2) \qquad d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}(dx^0)^2 + 2\, \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\, \beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\left(\beta_i\, dx^i\right)^2 \, .$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de Fermat en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\,\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum_i (dx^i)^2$. Il vient

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) \right\} d\sigma \tag{11.3}$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right).$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$1 - \beta^2 - (1-\beta^2) W^2 - (1-V^2)\left(1 - W \beta_i \lambda^i\right)^2 = 0 . \tag{11.4}$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$\vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}.\vec{\beta})^2}[\vec{\beta}^2 + 2\vec{W}.\vec{\beta} + (1-\beta^2)\vec{W}^2 + (\vec{W}.\vec{\beta})^2] . \tag{11.5}$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$\vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}.\vec{\beta})^2}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}.\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}.\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2 \tag{11.6}$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}.\vec{\beta}}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}.\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}.\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right] .$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

---

[4] Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.