Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 10. Interprétation du signe ' de $\bar{g}_{0\alpha}x^\alpha$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

(9.5)
$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\, d\sigma$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = - g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps V_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} n d\sigma = 0 \, .$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de Fermat en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des $g_{\alpha\beta}$.

10. Interprétation du signe ε' de $\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

L'équation

$$\mathcal{L}^2\, du^2 = \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique $\overline{C}_x$ au point x des équations de Maxwell. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x

$$\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = 0 \, .$$

Désignons par $M\,(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\overline{C}_x$. Prenons un couple de points voisins de M, ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ appartenant respectivement aux deux nappes de $\overline{C}_x$ et symétriques par rapport à π_x. Soient

$$M_1\,(x^0 + dx^0\,,\; x^i + dx^i) \qquad M_1'\,(x^0 - d'\,x^0\,,\; x^i + dx^i)\, .$$

On peut dire que MM_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A′ $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = - \bar{g}_{0\alpha}\, d' x^\alpha .$$

On en déduit

$$d' x^0 = dx^0 + 2 \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^1) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A′ $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

(11.1) $$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 .$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

(11.2) $$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}(dx^0)^2 + 2\frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\left(\beta_i\, dx^i\right)^2 .$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$