Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 9. Le principe de FERMAT

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h \to \infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du .$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

LEMME. — *Les géodésiques de longueur nulle de $\bar{V}_4$ se projettent sur $\bar{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du \tag{8.10}$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$ et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$dx^0 = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} dx^i dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}} . \tag{8.11}$$

On remarquera que $dx^0 = \mathrm{L}du$.

Dans le cas où $\bar{g}_{00}$ s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$dx^0 = - \frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du .$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\bar{g}_{00} \neq 0$, les rayons électromagnétiques dans* *l'espace sont des lignes réalisant l'extrêmum de l'intégrale*

$$(9,1) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε *est le signe de* $\overline{g}_{00}$ *et* ε' *le signe de* $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. *Le temps mis par un rayon pour aller du point* z_0 *au point* z_1 *est donné par*

$$(9.2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du \,.$$

Ce temps est extrêmum.

Dans le cas où $\overline{g}_{00} = 0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (9. 1) et (9. 2) respectivement par

$$(9.3) \qquad \int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$(9.4) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du \,.$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de Levi-Civita, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps V_4 est orthogonal. Soit

$$ds^2 = U\,(dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

la métrique d'univers de V_4. Les u_i étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$d\overline{s}^2 = \frac{U}{n^2} (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

On peut mettre (9. 2) sous la forme

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\, d\sigma \tag{9.5}$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = - g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps V_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} n d\sigma = 0 \; .$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de Fermat en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des $g_{\alpha\beta}$.

10. Interprétation du signe ε' de $\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

L'équation

$$\mathcal{L}^2\, du^2 = \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique $\overline{C}_x$ au point x des équations de Maxwell. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x

$$\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = 0 \; .$$

Désignons par $M\,(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\overline{C}_x$. Prenons un couple de points voisins de M, ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ appartenant respectivement aux deux nappes de $\overline{C}_x$ et symétriques par rapport à π_x. Soient

$$M_1\,(x^0 + dx^0\,,\ x^i + dx^i) \qquad M_1'\,(x^0 - d'\,x^0\,,\ x^i + dx^i) \; .$$

On peut dire que MM_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon