

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT
Autor: Quan, Pham Mau
Kapitel: 9. Le principe de FERMAT
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34626>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}} \right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du .$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

LEMME. — *Les géodésiques de longueur nulle de \bar{V}_4 se projettent sur \bar{V}_3 selon les extrêmales de l'intégrale*

$$(8.10) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

où ε est le signe de \bar{g}_{00} et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$(8.11) \quad dx^0 = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} dx^i dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}} .$$

On remarquera que $dx^0 = L du$.

Dans le cas où \bar{g}_{00} s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$dx^0 = -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du .$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne \bar{V}_4 . Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\bar{g}_{00} \neq 0$, les rayons électromagnétiques dans*

l'espace sont des lignes réalisant l'extrénum de l'intégrale

$$(9.1) \quad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε est le signe de \bar{g}_{00} et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$. Le temps mis par un rayon pour aller du point z_0 au point z_1 est donné par

$$(9.2) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon \varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du .$$

Ce temps est extrénum.

Dans le cas où $\bar{g}_{00} = 0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (9.1) et (9.2) respectivement par

$$(9.3) \quad \int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$(9.4) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du .$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps V_4 est orthogonal. Soit

$$ds^2 = U (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

la métrique d'univers de V_4 . Les u_i étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$ds^2 = \frac{U}{n^2} (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

On peut mettre (9.2) sous la forme

$$(9.5) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}} d\sigma$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = -g_{ij} dx^i dx^j$. On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps V_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} n d\sigma = 0.$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de FERMAT en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des $g_{\alpha\beta}$.

10. Interprétation du signe ε' de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.

L'équation

$$\mathcal{L}^2 du^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij} dx^i dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique \bar{C}_x au point x des équations de MAXWELL. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x

$$\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha = 0.$$

Désignons par $M(x^\alpha)$ le sommet de ce cône \bar{C}_x . Prenons un couple de points voisins de M , ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ appartenant respectivement aux deux nappes de \bar{C}_x et symétriques par rapport à π_x . Soient

$$M_1(x^0 + dx^0, x^i + dx^i) \quad M'_1(x^0 - d' x^0, x^i + dx^i).$$

On peut dire que MM'_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon