Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: 8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $x^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^l$, h

$$\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7,9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} \mathrm{L} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} \partial_{\dot{k}} \varphi - h \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} .$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} \mathrm{L}\, dx^k .$$

Autrement dit, elles sont extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)\, du \tag{7.10}$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible [3].

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{\mathrm{V}}_4$.

Nous supposons que la variété $\overline{\mathrm{V}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{8.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

---

[3]) Voir A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.

Nous supposons que $\bar{g}_{00}$ ne s'annule pas dans le domaine étudié. Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00}\dot{x}^0 + \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathcal{L} \tag{8.2}$$

et à éliminer $\dot{x}^0$ entre cette équation et

$$\mathrm{L} = \mathcal{L} - h\dot{x}^0 . \tag{8.3}$$

En décomposant $\mathcal{L}^2$ en carrés à partir de la variable directrice $\dot{x}^0$, il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i}\bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = h\mathcal{L}$, on tire l'équation

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}}} \tag{8.4}$$

qui fournit $\mathcal{L}$ en fonction des variables x^k, $\dot{x}^l$, h. De (8. 2), on tire ensuite

$$\dot{x}_0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}}\mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} . \tag{8.5}$$

On en déduit d'après (8. 3) et en vertu de (8. 4)

$$\mathrm{L} = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right)\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + h\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \tag{8.6}$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$.

L est bien une fonction de x^k, $\dot{x}^l$, h homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^l$. Elle définit sur la variété quotient $\overline{\mathrm{V}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\overline{\mathrm{V}}_3$ la fonction L $(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$

homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$, qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta}\ .$$

Les courbes extrêmales correspondantes sont donc des géodésiques de $\overline{V}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\overline{V}_4$ qui correspondent à l'intégrale première $\partial_0\mathcal{L} = h$ se projettent sur la variété quotient $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(-\varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right)\hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j} + h\,\frac{\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du \tag{8.7}$$

où h a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\varepsilon}{h}\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right)\hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\,\dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du\ . \tag{8.8}$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de $\dot{x}^0$:

$$dx^0 = \frac{h}{\overline{g}_{00}}\sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{h^2}{\overline{g}_{00}}}\,\hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, dx^i}{\overline{g}_{00}}\ . \tag{8,9}$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathcal{L} \to 0$. De la relation $h\mathcal{L} = \overline{g}_{0\alpha}\,\dot{x}^\alpha$, il résulte que $h \to \infty$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$ et h a le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\,\dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\overline{g}_{00}}\left(\overline{g}_{0\alpha}\,\dot{x}^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^j = 0\ .$$

On en déduit que $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (8. 8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ sur $\overline{V}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h\to\infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du .$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

Lemme. — *Les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ se projettent sur $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$\text{(8.10)} \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$ et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$\text{(8.11)} \qquad dx^0 = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} .$$

On remarquera que $dx^0 = \mathrm{L}du$.

Dans le cas où $\bar{g}_{00}$ s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i} du$$

et

$$dx^0 = - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i} du .$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

Théorème. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\bar{g}_{00} \neq 0$, les rayons électromagnétiques dans*