Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

Kapitel: III. Etude géométrique DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

les variétés V_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\overline{V}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$, le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\overline{C}_x$ le long de la tangente à $\overline{L}_0$.

Nous avons démontré le théorème

THÉORÈME. — *Les bicaractéristiques des équations de* MAXWELL *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne* $\overline{V}_4$ *munie de la métrique associée*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\overline{L}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction* n *variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien* $\overline{V}_4$ *muni de la métrique*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ *est le tenseur métrique fondamental et* u_α *le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.*

III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps V_4 est *stationnaire* dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de D_4, la famille des lignes z ou lignes de temps satisfaisant aux hypothèses suivantes:

a) les lignes de temps sont homéomorphes à la droite réelle R;

b) on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions D_3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4, telle qu'il existe un homéomorphisme de même classe de la variété D_4 sur le produit topologique $D_3 \times R$ dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. La variété quotient D_3 sera dite simplement *espace.*

On peut définir dans D_4 des systèmes de coordonnées locales (x^0, x^i), dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante. Les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraire de D_3. La donnée des (x^i) détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant homéomorphes à D_3. Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^0 et le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries admet pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1 \qquad \xi^i = 0$$

et a pour carré $\xi^2 = g_{00} > 0$.

Dans la suite on n'introduit que des systèmes de coordonnées adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{6.1}$$

à partir de la variable directrice dx^0, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{g_{00}} \left(g_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + d\hat{s}^2 \tag{6.2}$$

où

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \equiv \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i\, dx^j \tag{6.3}$$

définit sur D_3 une métrique riemannienne définie négative.

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}$, θ ainsi que les coefficients $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\bar{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\bar{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\bar{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\bar{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\bar{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)(u_0)^2 .$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\bar{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable V_{n+1}, soit $W_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de V_{n+1}. Si l'on adopte sur V_{n+1} des coordonnées locales (x^α) chaque élément de $W_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées (x^α) du point x correspondant de V_{n+1} et des $n+1$ composantes $(\dot{x}^\alpha)$ du vecteur $\dot{x}$ dans le repère naturel en x associé aux (x^α). Une structure de *variété finslérienne sur* V_{n+1} est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $W_{2(n+1)}$ telle que pour x fixe, $\mathcal{L}(x, \lambda \dot{x}) = \lambda \mathcal{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$.

Considérons une variété différentiable V_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de générateur $\vec{\zeta}$, ne laissant invariant aucun point de V_{n+1} ($\vec{\zeta} \neq 0$). Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle R, et soit V_n la variété quotient de V_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. Nous identifierons V_n à l'espace dont les points z sont les trajectoires d'isométries. Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la fonction $\mathcal{L}$ est localement indépendante de la variable x^0:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0) .$$

Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient V_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions L $(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de V_{n+1} extrêmales de l'intégrale

$$(7.1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x\,,\ \dot{x})\, du \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{du}\right)$$

correspondent par projection sur V_n des extrêmales de

$$(7.2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(z\,,\ \dot{\ })\, du \qquad \left(\dot{\ } = \frac{dz}{du}\right) .$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \ldots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$ et nous supposons

$$\partial_{\dot 0 \dot 0} \mathcal{L} \neq 0 , \qquad \partial_{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot x^{\alpha}} .$$

Donnons-nous une extrêmale de (7. 1) par une représentation paramétrique $x^\alpha(u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrêmales de (7. 1)

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \dot x^\alpha \tag{7.3}$$

où $\dot x^\alpha$ satisfait à

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{7.4}$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$\omega = \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x^\alpha} dx^\alpha = \partial_{\dot k} \mathcal{L}\, dx^k + \partial_{\dot 0} \mathcal{L}\, dx^0 . \tag{7.5}$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$\partial_{\dot 0} \mathcal{L} = h . \tag{7.6}$$

Comme $\partial_{\dot 0 \dot 0} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (7.6) par rapport à $\dot x^0$; on obtient l'équation équivalente

$$\dot x^0 = \varphi(x^k, \dot x^l, h) \tag{7.7}$$

où φ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot x^l$ et dépendant effectivement de h.

Considérons la famille des extrêmales (E_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h. Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur $h dx^0$ et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrêmales admet l'invariant intégral relatif

$$\partial_{\dot k} \mathcal{L}\, dx^k . \tag{7.8}$$

Or d'après l'homogénéité de $\mathcal{L}$, on a

$$\dot x^k \partial_{\dot k} \mathcal{L} + \dot x^0 \partial_{\dot 0} \mathcal{L} = \mathcal{L} .$$

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^l$, h

$$\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7,9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} \mathrm{L} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, \partial_{\dot{k}} \varphi - h\, \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} .$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} \mathrm{L}\, dx^k .$$

Autrement dit, elles sont extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)\, du \tag{7.10}$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible [3].

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{V}_4$.

Nous supposons que la variété $\overline{V}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\mathcal{L}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{8.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

---

[3] Voir A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.

Nous supposons que $\bar{g}_{00}$ ne s'annule pas dans le domaine étudié. Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00}\dot{x}^0 + \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathcal{L} \tag{8.2}$$

et à éliminer $\dot{x}^0$ entre cette équation et

$$\mathrm{L} = \mathcal{L} - h\dot{x}^0 . \tag{8.3}$$

En décomposant $\mathcal{L}^2$ en carrés à partir de la variable directrice $\dot{x}^0$, il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i}\bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = h\mathcal{L}$, on tire l'équation

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{1 - \dfrac{h^2}{\bar{g}_{00}}}} \tag{8.4}$$

qui fournit $\mathcal{L}$ en fonction des variables x^k, $\dot{x}^l$, h. De (8. 2), on tire ensuite

$$\dot{x}_0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}}\mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} . \tag{8.5}$$

On en déduit d'après (8. 3) et en vertu de (8. 4)

$$\mathrm{L} = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right)\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + h\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \tag{8.6}$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$.

L est bien une fonction de x^k, $\dot{x}^l$, h homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^l$. Elle définit sur la variété quotient $\bar{\mathrm{V}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\bar{\mathrm{V}}_3$ la fonction L $(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathcal{L}\,(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$

homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$, qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta}\ .$$

Les courbes extrêmales correspondantes sont donc des géodésiques de $\overline{V}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\overline{V}_4$ qui correspondent à l'intégrale première $\partial_{\dot 0}\mathcal{L} = h$ se projettent sur la variété quotient $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(-\,\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j} + h\, \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du \tag{8.7}$$

où h a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du\ . \tag{8.8}$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de $\dot{x}^0$:

$$dx^0 = \frac{h}{\overline{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{h^2}{\overline{g}_{00}}}\, \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, dx^i}{\overline{g}_{00}}\ . \tag{8,9}$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathcal{L} \to 0$. De la relation $h\mathcal{L} = \overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$, il résulte que $h \to \infty$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$ et h a le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j = 0\ .$$

On en déduit que $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (8. 8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ sur $\overline{V}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h\to\infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du \,.$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

Lemme. — *Les géodésiques de longueur nulle de $\bar{V}_4$ se projettent sur $\bar{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$(8.10) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$ et ε' le signe de $\bar{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$(8.11) \qquad dx^0 = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \,.$$

On remarquera que $dx^0 = \mathrm{L}du$.

Dans le cas où $\bar{g}_{00}$ s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}\, du$$

et

$$dx^0 = - \frac{\bar{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i}\, \dot{x}^i}\, du \,.$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

Théorème. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\bar{g}_{00} \neq 0$, les rayons électromagnétiques dans* *l'espace sont des lignes réalisant l'extrêmum de l'intégrale*

$$(9,1) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε *est le signe de* $\overline{g}_{00}$ *et* ε' *le signe de* $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. *Le temps mis par un rayon pour aller du point* z_0 *au point* z_1 *est donné par*

$$(9.2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du \, .$$

Ce temps est extrêmum.

Dans le cas où $\overline{g}_{00} = 0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (9. 1) et (9. 2) respectivement par

$$(9.3) \qquad \int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i} du$$

et

$$(9.4) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i} du \, .$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de Levi-Civita, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps V_4 est orthogonal. Soit

$$ds^2 = U\, (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

la métrique d'univers de V_4. Les u_i étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$d\overline{s}^2 = \frac{U}{n^2} (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

On peut mettre (9. 2) sous la forme

$$(9.5) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\, d\sigma$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = - g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps V_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} n d\sigma = 0 \, .$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de Fermat en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des $g_{\alpha\beta}$.

10. Interprétation du signe ε' de $\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

L'équation

$$\mathcal{L}^2\, du^2 = \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique $\overline{C}_x$ au point x des équations de Maxwell. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x

$$\overline{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = 0 \, .$$

Désignons par $M\,(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\overline{C}_x$. Prenons un couple de points voisins de M, ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ appartenant respectivement aux deux nappes de $\overline{C}_x$ et symétriques par rapport à π_x. Soient

$$M_1\,(x^0 + dx^0 \,,\, x^i + dx^i) \qquad M'_1\,(x^0 - d'\,x^0 \,,\, x^i + dx^i) \, .$$

On peut dire que MM_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A' $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = - \bar{g}_{0\alpha}\, d'x^\alpha \, .$$

On en déduit

$$d'x^0 = dx^0 + 2\,\frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \, .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^1) au point d'espace A' $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A' $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

(11.1) $$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \, .$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

(11.2) $$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}(dx^0)^2 + 2\,\frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,\beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\left(\beta_i\, dx^i\right)^2 \, .$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

où $d\sigma^2 = - \sum\limits_i (dx^i)^2$. Il vient

$$(11.3) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}\left[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2\right.} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}\left[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2\right.} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) .$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(11.4) \qquad 1 - \beta^2 - (1-\beta^2) W^2 - (1-V^2)\left(1 - W \beta_i \lambda^i\right)^2 = 0 .$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$(11.5) \qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}\left[\vec{\beta}^2 + 2\vec{W}\cdot\vec{\beta} + (1-\beta^2)\vec{W}^2 + (\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2\right] .$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$(11.6) \qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\cdot\vec{\beta}}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right] .$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

[4] Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.