

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT
Autor: Quan, Pham Mau
Kapitel: 4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34626>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$\begin{aligned} g^{00} \partial_0 Q_\alpha^0 &= A^{i\beta}_\alpha \partial_i Q_\beta^0 + B^\beta_\alpha Q_\beta^0 \\ \partial_0 P^0 &= C^i \partial_i P^0 + (\partial_i C^i - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha C^\beta) P^0 \\ \partial_0 \mathcal{E}^0 &= -\Gamma_{\alpha 0}^\alpha \mathcal{E}^0 \end{aligned}$$

où les $A^{i\beta}_\alpha$, B^β_α , C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues Q_α^0 , P^0 , \mathcal{E}^0 . Comme $Q_\alpha^0 = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S , elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy \mathcal{C} , elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy \mathcal{C} rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer u^α , p , δ , puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs \mathcal{G} ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ , u^α , p , δ).

II. ETUDE DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles :

- 1) les variétés $g^{00} = 0$ tangentes aux cônes élémentaires,
- 2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,
- 3) les variétés engendrées par les lignes de courant,
- 4) les variétés $g^{00} - (1 - \epsilon\mu) u^0 u^0 = 0$ que nous allons étudier.

Sur les équations (3.15), on voit que si l'hypersurface S portant les données de Cauchy est telle que sur S

$$g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^0 = 0$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété S est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par V_3^M .

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques V_3^M définies par $f(x^\alpha) = 0$, sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(4.1) \quad (g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Pour qu'elles aient une signification physique, il faut supposer que les variétés V_3^M soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes au cône élémentaire $ds^2 = 0$ de V_4 . Nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences de la Physique relativiste. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \varepsilon \mu) (u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0.$$

On en déduit

$$(4.2) \quad \varepsilon \mu \geq 1.$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela, considérons deux surfaces d'ondes voisines $(V_3^M)_0$ et $(V_3^M)_\theta$ définies par les équations

$$f(x^\alpha) = 0 \quad f(x^\alpha) = \theta$$

et prenons θ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point x de $(V_3^M)_0$ coupe $(V_3^M)_\theta$

en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta \vec{u}$, η étant donné par la relation

$$(4.3) \quad \eta u^\alpha \partial_\alpha f = \theta .$$

Soit \vec{n} le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en x à la surface d'onde $(V_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en x

$$(4.4) \quad n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}} .$$

La trajectoire orthogonale des V_3^M issue de x coupe $(V_3^M)_0$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1 \vec{n}$, η_1 étant déterminé par la relation

$$\eta_1 n^\lambda \partial_\lambda f = \theta .$$

On en déduit

$$(4.5) \quad \eta_1 = \frac{\theta}{n^\lambda \partial_\lambda f} = \frac{\theta \sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f} = \frac{-\theta}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}} .$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}$. En vertu de (4.3) et (4.4), on a

$$\eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) = -\eta_1$$

et

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = (\eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}) \cdot \vec{n} = \eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \eta_1 = 0 .$$

Le vecteur \vec{t} est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps car son carré

$$\eta^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2 \eta_1^2 - 2 \eta \eta_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) = \eta^2 + \eta_1^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta \vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orienté dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation V de l'onde se trouve ainsi définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\eta_1}{\eta_0} \right| .$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant η_1 et η_0 par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\epsilon \mu}.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à $(\epsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$. Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses $\epsilon \mu \geq 1$, la vitesse de propagation V est inférieure à une vitesse limite $c = 1$; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\epsilon \mu = 1$).

5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \epsilon \mu) u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de MAXWELL. Soit $\bar{g}_{\alpha\beta}$ les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta.$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par \bar{V}_4 la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps V_4 et munie de la métrique associée ds^2 . Nous