Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT
Autor: Quan, Pham Mau
Kapitel: 4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$g^{00}\,\partial_0\,Q^0{}_\alpha = A^{i\beta}{}_\alpha\,\partial_i\,Q^0{}_\beta + B^\beta{}_\alpha\,Q^0{}_\beta$$

$$\partial_0\,P^0 = C^i\,\partial_i\,P^0 + \left(\partial_i\,C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\,C^\beta\right)P^0$$

$$\partial_0\,\mathcal{E}^0 = -\,\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\,\mathcal{E}^0$$

où les $A^{i\beta}{}_\alpha$, $B^\beta{}_\alpha$, C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $Q^0{}_\alpha$, P^0, $\mathcal{E}^0$. Comme $Q^0{}_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S, elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy $\mathcal{C}$, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy $\mathcal{C}$ rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer u^α, p, δ, puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ).

II. Etude des caractéristiques des équations de Maxwell

4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

1) les variétés $g^{00} = 0$ tangentes aux cônes élémentaires,

2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,

3) les variétés engendrées par les lignes de courant,

4) les variétés $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\,u^0\,u^0 = 0$ que nous allons étudier.

Sur les équations (3. 15), on voit que si l'hypersurface S portant les données de Cauchy est telle que sur S

$$g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^0 = 0$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S. Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de Maxwell correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété S est une variété caractéristique pour les équations de Maxwell. Une telle variété sera désignée par V_3^M.

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques V_3^M définies par $f(x^\alpha) = 0$, sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(4.1) \qquad (g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 .$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Pour qu'elles aient une signification physique, il faut supposer que les variétés V_3^M soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes au cône élémentaire $ds^2 = 0$ de V_4. Nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences de la Physique relativiste. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \varepsilon \mu) \left(u^\alpha \partial_\alpha f\right)^2 \leqslant 0 .$$

On en déduit

$$(4. 2) \qquad \varepsilon \mu \geqslant 1 .$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela, considérons deux surfaces d'ondes voisines $(V_3^M)_0$ et $(V_3^M)_\theta$ définies par les équations

$$f(x^\alpha) = 0 \qquad f(x^\alpha) = \theta$$

et prenons θ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point x de $(V_3^M)_0$ coupe $(V_3^M)_\theta$

en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta \vec{u}$, η étant donné par la relation

$$\eta\, u^\alpha\, \partial_\alpha f = \theta\,. \tag{4.3}$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en x à la surface d'onde $(V_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en x

$$n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}\,. \tag{4.4}$$

La trajectoire orthogonale des V_3^M issue de x coupe $(V_3^M)_\theta$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1 \vec{n}$, η_1 étant déterminé par la relation

$$\eta_1\, n^\lambda\, \partial_\lambda f = \theta\,.$$

On en déduit

$$\eta_1 = \frac{\theta}{n^\lambda\,\partial_\lambda f} = \frac{\theta\sqrt{-g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}{g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f} = \frac{-\theta}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}\,. \tag{4.5}$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta\vec{u} - \eta_1\vec{n}$. En vertu de (4. 3) et (4. 4), on a

$$\eta\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) = -\,\eta_1$$

et

$$\vec{t}\,.\,\vec{n} = (\eta\,\vec{u} - \eta_1\,\vec{n})\,.\,\vec{n} = \eta\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) + \eta_1 = 0\,.$$

Le vecteur $\vec{t}$ est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps car son carré

$$\eta^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2\,\eta_1{}^2 - 2\,\eta\,\eta_1\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) = \eta^2 + \eta_1{}^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta\vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orienté dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation V de l'onde se trouve ainsi définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\theta\to 0}\left|\frac{\eta_1}{\eta_0}\right|\,.$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant η_1 et η_0 par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\,.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à $(\varepsilon\,\mu)^{-\frac{1}{2}}$. Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses $\varepsilon\mu \geqslant 1$, la vitesse de propagation V est inférieure à une vitesse limite $c = 1$; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\varepsilon\mu = 1$).

5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de Maxwell fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\,\mu)\, u^\alpha\, u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de Maxwell. Soit $\bar{g}_{\alpha\beta}$ les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\,\mu}\right) u_\alpha\, u_\beta\,.$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta\,.$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par $\bar{V}_4$ la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps V_4 et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$. Nous