

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1958)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PRINCIPE DE FERMAT  
**Autor:** Quan, Pham Mau  
**Kapitel:** II. Etude des caractéristiques DES ÉQUATIONS DE MAXWELL  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34626>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$\begin{aligned} g^{00} \partial_0 Q^0_\alpha &= A^{i\beta}_\alpha \partial_i Q^0_\beta + B^\beta_\alpha Q^0_\beta \\ \partial_0 P^0 &= C^i \partial_i P^0 + (\partial_i C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} C^\beta) P^0 \\ \partial_0 \mathcal{E}^0 &= - \Gamma^\alpha_{\alpha 0} \mathcal{E}^0 \end{aligned}$$

où les  $A^{i\beta}_\alpha$ ,  $B^\beta_\alpha$ ,  $C^\alpha$  sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues  $Q^0_\alpha$ ,  $P^0$ ,  $\mathcal{E}^0$ . Comme  $Q^0_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$  sur  $S$ , elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur  $S$  par les données de Cauchy  $\mathcal{C}$ , elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy  $\mathcal{C}$  rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ , puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs  $\mathcal{G}$  ( $g_{\alpha\beta}$ ,  $H_{\alpha\beta}$ ,  $\theta$ ,  $u^\alpha$ ,  $p$ ,  $\delta$ ).

## II. ETUDE DES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

### 4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

- 1) les variétés  $g^{00} = 0$  tangentes aux cônes élémentaires,
- 2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,
- 3) les variétés engendrées par les lignes de courant,
- 4) les variétés  $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu) u^0 u^0 = 0$  que nous allons étudier.

Sur les équations (3.15), on voit que si l'hypersurface  $S$  portant les données de Cauchy est telle que sur  $S$

$$g^{00} - (1 - \varepsilon \mu) u^0 u^0 = 0$$

les dérivées  $\partial_0 H_{0i}$  du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de  $S$ . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété  $S$  est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par  $V_3^M$ .

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques  $V_3^M$  définies par  $f(x^\alpha) = 0$ , sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(4.1) \quad (g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Pour qu'elles aient une signification physique, il faut supposer que les variétés  $V_3^M$  soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes au cône élémentaire  $ds^2 = 0$  de  $V_4$ . Nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences de la Physique relativiste. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \varepsilon \mu) (u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0.$$

On en déduit

$$(4.2) \quad \varepsilon \mu \geq 1.$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela, considérons deux surfaces d'ondes voisines  $(V_3^M)_0$  et  $(V_3^M)_\theta$  définies par les équations

$$f(x^\alpha) = 0 \quad f(x^\alpha) = \theta$$

et prenons  $\theta$  pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point  $x$  de  $(V_3^M)_0$  coupe  $(V_3^M)_\theta$

en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par  $x + \eta \vec{u}$ ,  $\eta$  étant donné par la relation

$$(4.3) \quad \eta u^\alpha \partial_\alpha f = 0.$$

Soit  $\vec{n}$  le vecteur normé ( $\vec{n}^2 = -1$ ) normal en  $x$  à la surface d'onde  $(V_3^M)_0$ . Il a pour composantes covariantes en  $x$

$$(4.4) \quad n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}.$$

La trajectoire orthogonale des  $V_3^M$  issue de  $x$  coupe  $(V_3^M)_0$  en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit  $x + \eta_1 \vec{n}$ ,  $\eta_1$  étant déterminé par la relation

$$\eta_1 n^\lambda \partial_\lambda f = 0.$$

On en déduit

$$(4.5) \quad \eta_1 = \frac{0}{n^\lambda \partial_\lambda f} = \frac{0 \sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f} = \frac{-0}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}.$$

Introduisons le vecteur  $\vec{t} = \eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}$ . En vertu de (4.3) et (4.4), on a

$$\eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) = -\eta_1$$

et

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = (\eta \vec{u} - \eta_1 \vec{n}) \cdot \vec{n} = \eta (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \eta_1 = 0.$$

Le vecteur  $\vec{t}$  est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps car son carré

$$\eta^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2 \eta_1^2 - 2 \eta \eta_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) = \eta^2 + \eta_1^2$$

est positif.

Le vecteur  $\eta \vec{u}$  apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orienté dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation  $V$  de l'onde se trouve ainsi définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{\eta_1}{\eta_0} \right|.$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant  $\eta_1$  et  $\eta_0$  par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à  $(\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$ . Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses  $\varepsilon \mu \geq 1$ , la vitesse de propagation  $V$  est inférieure à une vitesse limite  $c = 1$ ; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ( $\varepsilon \mu = 1$ ).

## 5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu) u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de MAXWELL. Soit  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta.$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par  $\bar{V}_4$  la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps  $V_4$  et munie de la métrique associée  $d\bar{s}^2$ . Nous

appellerons cône élémentaire associé  $\bar{C}_x$  en un point  $x$  le cône réel de directions tangentes à  $\bar{V}_4$  défini par l'équation  $d\bar{s}^2 = 0$ .

Dans l'espace riemannien  $\bar{V}_4$ , les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL définies localement par  $f(x^\alpha) = 0$ , sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(5.1) \quad \bar{\Delta}_1 f \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé  $\bar{C}_x$ . Les cônes élémentaires  $\bar{C}_x$  de  $\bar{V}_4$  sont donc cônes caractéristiques pour les équations de MAXWELL et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes.

Une variété caractéristique  $V_3^M$ , c'est-à-dire une solution de (5.1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (5.1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de  $\bar{V}_4$  constituées par l'ensemble d'une courbe  $\bar{L}_0$  et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes  $\bar{L}_0$  sont appelées les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Pour les déterminer, posons

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(5.2) \quad \bar{\Delta}_1 f \equiv 2H(x^\lambda, \partial_\mu f) = C$$

où  $C$  est une constante arbitraire. Relativement aux variables  $x^\alpha, f, y_\beta$  les bandes caractéristiques des équations de MAXWELL sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\partial H} = \dots = \frac{dx^3}{\partial H} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\partial H} = \dots = -\frac{dy_3}{\partial H} = du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = C$$

pour la valeur  $C$  de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire  $u$ , les fonctions  $x^\alpha(u)$ ,  $y_\alpha(u)$  sont données par le système canonique

$$(5.3) \quad \frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \quad \frac{dy_\alpha}{du} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

relatif à la fonction hamiltonienne  $H(x^\lambda, y_\mu)$ . Le premier groupe des équations (5.3) s'écrit explicitement

$$(5.4) \quad \dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \quad \left( \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \right).$$

Inversement

$$(5.5) \quad y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha.$$

Cela posé, les solutions  $x^\alpha(u)$  de (5.3) sont extrémales de la fonction lagrangienne  $L$  définie par

$$2L = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables  $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$  aux variables canoniques  $(x^\alpha, y_\beta)$  qui leur sont liées par (5.4) et (5.5), on a entre  $H$  et  $L$  la relation classique

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial L} - L = L.$$

Ces solutions sont les extrémales satisfaisant à l'intégrale première

$$(5.6) \quad 2L = C$$

pour la valeur  $C$  de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrémales ainsi définies sont aussi les extrémales de

$$\sqrt{2L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (5.6). Il en résulte que les  $x^\alpha(u)$  définissent des géodésiques de  $\bar{V}_4$ . Si  $C = 0$ , le système différentiel aux caractéristiques de (5.1) admet l'intégrale première  $f = \text{const.}$  et

les variétés  $V_3^M$  peuvent être engendrées par les bandes de  $\bar{V}_4$  définies par les géodésiques de longueur nulle  $\bar{L}_0$ , le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire  $\bar{C}_x$  le long de la tangente à  $\bar{L}_0$ .

Nous avons démontré le théorème

**THÉORÈME.** — *Les bicaractéristiques des équations de MAXWELL sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne  $\bar{V}_4$  munie de la métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques  $V_3^M$  jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques  $\bar{L}_0$  sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

**THÉORÈME.** — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction  $n$  variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien  $\bar{V}_4$  muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \left( g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta \right) dx^\alpha dx^\beta$$

où  $g_{\alpha\beta}$  est le tenseur métrique fondamental et  $u_\alpha$  le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.

### III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE

#### DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

#### 6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps  $V_4$  est *stationnaire* dans un domaine  $D_4$  si la variété riemannienne définie par  $D_4$  muni de la métrique d'univers  $ds^2$  admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires  $z$  orientées dans le temps,