Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Autor: Quan, Pham Mau

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

par PHAM MAU QUAN, Paris

(Reçu le 31 septembre 1957)

INTRODUCTION

On peut donner au principe de FERMAT en Optique l'énoncé suivant qui le rapproche du principe de Maupertuis ou de moindre action:

Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction n variable, les rayons lumineux sont les extrêmales du chemin optique défini par l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} n d\sigma$$

où z_0, z_1 sont deux points quelconques du milieu et $d\sigma$, l'élément linéaire du rayon lumineux passant par ces deux points.

Nous proposons dans cet article une démonstration de ce principe en lui donnant un énoncé plus général. Notre idée est la suivante.

La lumière est un phénomène électromagnétique gouverné par les équations de MAXWELL qui sont un système d'équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les vecteurs champs et inductions électromagnétiques. Les variétés caractéristiques de ces équations représentent les surfaces d'ondes électromagnétiques et les bicaractéristiques, les rayons associés. Leur étude permet donc de trouver les lois de propagation du champ électromagnétique et en particulier de la lumière. Et le principe de FERMAT en est une conséquence.

Pour représenter les phénomènes de la Mécanique et de l'Electromagnétisme d'une manière indépendante du mode de repérage de l'espace et du temps, il est naturel d'avoir recours à une variété V_4 à quatre dimensions, trois d'espace et une de temps et qui sera telle qu'à chacun de ses points corresponde un événement déterminé. Cette variété est la variété *espace-temps* de la théorie de la relativité. On la rapporte à des systèmes de coordonnées curvilignes quelconques et on y cherche une représentation tensorielle des lois physiques [1]. Aussi nous sera-t-il utile de rappeler certaines définitions classiques de la théorie de la relativité; mais nous supposerons connue la théorie des espaces de Riemann [2]. Nous cherchons à préciser la notion d'inductions électromagnétiques dans le nouveau mode de représentation afin de formuler d'une manière correcte les équations correspondantes de la théorie de MAXWELL. C'est ce qui va faire l'objet de la première partie de notre exposé. Nous continuerons par une étude des caractéristiques de ces équations en établissant que les rayons électromagnétiques sont les géodésiques de longueur nulle d'une variété riemannienne associée $\overline{V}_4$. L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions fournira l'énoncé du principe de FERMAT, dont l'existence est liée à celle d'univers stationnaire et de mouvements permanents.

Nous utiliserons les symboles ∇_α pour désigner les dérivées covariantes et ∂_α pour désigner les dérivées partielles $\left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)$.

I. INDUCTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES ET ÉQUATIONS RELATIVISTES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

1. La variété espace-temps.

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace-temps est une variété différentiable à quatre dimensions V_4 de classe de différentiabilité C^2, C^4 par morceaux, sur laquelle est définie une métrique riemannienne ds^2 de type hyperbolique normal,

---

1) Cette représentation indépendante du mode de repérage dans la variété V_4 a conduit historiquement à une meilleure intelligence des phénomènes de l'électrodynamique des corps en mouvement.

2) Lire par exemple A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel* (A. Colin, Paris, 1950).

à un carré positif et trois carrés négatifs. Cette métrique dite *métrique d'univers* a, dans un système de coordonnées admissibles (x^α), pour expression locale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \, . \tag{1.1}$$

La variété V_4 possède en chaque point un espace vectoriel tangent du type de Minkowski.

L'équation $ds^2 = 0$ définit en chaque point x de V_4 un cône réel C_x de directions tangentes à V_4 dit *cône élémentaire* en x. Une direction $d\vec{x}$ en x est dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure $(ds^2 > 0)$ ou extérieure $(ds^2 < 0)$ au cône C_x. Une courbe Γ de V_4 est orientée dans le temps si les tangentes en ses différents points sont orientées dans le temps. Un 3-plan tangent en x à V_4 est orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps. Une hypersurface S à trois dimensions est orientée dans le temps ou dans l'espace selon que ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans le temps ou dans l'espace. Pour qu'une hypersurface S, définie localement par $f(x^\alpha) = 0$, soit orientée dans le temps, il faut et il suffit que

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f < 0 \, .$$

Pour qu'elle soit orientée dans l'espace, il faut et il suffit que $\Delta_1 f > 0$.

Les dix coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont dits les *potentiels de gravitation* relativement au système de coordonnées locales (x^α), parce que leurs écarts à la géométrie euclidienne tangente rendent compte de la gravitation. Pour limiter la généralité de la métrique dans le cadre de la relativité générale, le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est astreint à vérifier le système des dix équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}$$

qui généralisent les équations de Laplace-Poisson.

$S_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'Einstein de la variété riemannienne V_4. Il est d'origine géométrique. La description de l'état de la distribution énergétique est faite par le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, suivant des schémas de type hydrodynamique. On dit qu'un domaine D_4 de l'espace-temps est occupé par une distribution énergétique schématisée sous forme de *fluide*, si sur le domaine D_4 sont définis

1) un champ de scalaire ρ dit *densité propre* du fluide,

2) un champ de vecteur unitaire orienté dans le temps $\vec{u}$ dit *vecteur vitesse unitaire* dont les trajectoires sont appelées les lignes de courant du fluide.

On appellera *repère propre* en un point x du domaine D_4 un repère orthonormé dont le premier vecteur orienté dans le temps coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs orientés dans l'espace définissent le tri-plan π_x orthogonal à $\vec{u}$ qu'on appelle *espace associé* à la direction de temps $\vec{u}$.

Le repère propre précédent joue le rôle d'un repère galiléen local par rapport auquel la matière est au repos. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Puis, par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement au repère naturel associé à un système de coordonnées locales quelconque. Inversement, l'interprétation physique des équations se fait relativement au repère propre dans l'espace tangent au point considéré. On peut aussi considérer un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites dans lequel la métrique a pour expression

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

où $x^0 = ct$, c désignant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

2. Inductions électromagnétiques et équations de MAXWELL.

La théorie de Maxwell pour la matière fait intervenir un champ électromagnétique variable avec le temps, défini par quatre vecteurs d'espace: champ électrique $\vec{E}$ et induction magnétique $\vec{B}$, champ magnétique $\vec{H}$ et induction électrique D. Le champ électromagnétique ainsi défini est régi par les équations de MAXWELL qui peuvent s'écrire dans un système d'unités convenables, relativement à un repère lié à la matière au point considéré

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} - \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{\Gamma} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \delta\,. \end{cases}$$

Ces équations établissent le lien entre les champs et inductions $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ d'une part et la densité de charge δ et le courant de conduction $\vec{\Gamma}$ d'autre part. Ces diverses quantités sont de plus liées par les relations

$$(2.3) \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$(2.4) \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$(2.5) \qquad \vec{\Gamma} = \sigma \vec{E}$$

où ε, μ, σ représentent respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré. Le milieu est dit *isotrope* si ε, μ, σ sont des scalaires. C'est ce que nous supposerons dans la suite.

La représentation vectorielle précédente n'est bien adaptée qu'à l'étude des transformations consistant en un déplacement purement spatial et un changement d'origine pour le temps. Pour avoir une représentation tensorielle indépendante du mode de repérage dans la variété espace-temps V_4, on peut généraliser les équations de MAXWELL de la manière suivante.

Considérons un domaine D_4 de l'espace-temps V_4 occupé par un milieu matériel chargé et conducteur, siège des phénomènes électromagnétiques. Soit x un point de D_4 et R le repère propre associé. En admettant que les équations rigoureuses du champ électromagnétique se réduisent localement dans le repère propre R aux équations classiques (2. 1), (2. 2) nous sommes amenés à introduire deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2, $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$, dont les composantes relatives au repère propre sont

$$(H_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations

$$G_{0i} = \varepsilon H_{0i} \qquad \mu G_{ij} = H_{ij} . \tag{2.6}$$

Sur ces formules et dans la suite, les indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3 tandis que les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

Nous introduisons les tenseurs adjoints $\overset{*}{G}_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{H}_{\alpha\beta}$ définis par

$$\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta} \qquad \overset{*}{G}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \tag{2.7}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de V_4. Les relations (2. 6) peuvent alors s'écrire sous la forme invariante

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}\, u^\alpha &= \varepsilon H_{\alpha\beta}\, u^\alpha \\ \mu \overset{*}{G}_{\alpha\beta}\, u^\alpha &= \overset{*}{H}_{\alpha\beta}\, u^\alpha . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ces relations sont appelées les *équations de liaison.* Elles montrent que les deux champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut exprimer les $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$. Un calcul donne

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}\left(H_{\sigma\alpha}\, u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta}\, u^\sigma u_\alpha\right) . \tag{2.9}$$

Cela posé, le champ électromagnétique doit satisfaire aux équations de MAXWELL qui s'écrivent dans la variété espace-temps

$$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta = J_\beta \tag{2.11}$$

où J_β est le vecteur courant électrique généralisé. En tenant compte des valeurs des composantes de $\vec{J}$ dans le repère propre, on est conduit à faire l'hypothèse

$$J_\beta = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta} . \tag{2.12}$$

Le vecteur $\vec{J}$ possède ainsi une composante $\delta\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$ et une composante $\Gamma_\alpha = u^\rho H_{\rho\alpha}$ orthogonale à $\vec{u}$. La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction. δ sera appelé *densité propre de charge électrique*.

Les équations (2. 10) peuvent encore s'écrire

$$\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} + \nabla_\beta H_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = 0 .$$

Elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe localement un vecteur φ_α tel que $H_{\alpha\beta}$ soit son rotationnel

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha .$$

Enfin, on démontre que les vecteurs

$$\mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} \qquad \mathcal{D}_\beta = \nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta \tag{2.13}$$

qui figurent aux premiers membres des équations (2. 10), (2. 11) vérifient les identités

$$\nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0 \qquad \nabla_\alpha \mathcal{D}^\alpha = 0 \tag{2.14}$$

dites conditions de conservation relatives aux équations de Maxwell. Elles entraînent la conservation du courant électrique

$$\nabla_\alpha J^\alpha \equiv \nabla_\alpha\left(\delta u^\alpha + \sigma u_\rho H^{\rho\alpha}\right) = 0 . \tag{2.15}$$

3. L'intégration des équations de MAXWELL.

En relativité générale, les équations de l'électromagnétisme sont constituées par l'ensemble des équations de Maxwell et des équations d'Einstein auquel s'ajoutent les conditions de conservation. Supposons que le milieu occupant le domaine D_4 considéré soit schématisé sous forme de fluide parfait chargé conducteur où l'on tient compte des phénomènes électromagnétiques et thermodynamiques. Dans ce cas on peut établir l'expression du tenseur d'impulsion-énergie

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu)\, \tau_{\alpha\rho} u^\rho u_\beta$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left(G_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}\right) - G_{\rho\alpha} H^\rho{}_\beta \tag{3.1}$$

$$q_\alpha = - \varkappa\, \partial_\rho \theta \left(g^\rho_\alpha - u^\rho u_\alpha\right)$$

où p est la pression et θ la température en chaque point du fluide, q_α le vecteur courant de chaleur qui satisfait à l'hypothèse de Fourier généralisée, $\varkappa$ représentant la conductivité thermique. ρ, p, θ sont liés par l'équation d'état

$$\rho = \varphi(p, \theta)\,. \tag{3.2}$$

Les équations de Maxwell-Einstein sont

$$\mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{D}_\beta \equiv g^{\alpha\rho} \nabla_\alpha G_{\rho\beta} = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta} \tag{3.4}$$

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{3.5}$$

auxquelles on adjoint le caractère unitaire de u^α, les conditions de conservation pour le tenseur d'impulsion-énergie, le vecteur courant de chaleur et le vecteur courant électrique

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = +1 \tag{3.6}$$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.7}$$

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho + J^\alpha H_{\alpha\beta} u^\beta \tag{3.8}$$

$$\nabla_\alpha \left(\delta u^\alpha + \sigma u_\alpha H^{\rho\alpha}\right) = 0\,. \tag{3.9}$$

(3. 8) est l'équation de Fourier généralisée où c et l représentent respectivement la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur de dilatation du fluide. Les équations (3.6), (3.7), (3. 8) constituent un système différentiel aux lignes de courant du fluide.

Les scalaires $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ qui caractérisent le fluide sont supposés donnés. Les variables de champ sont constituées par l'ensemble $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ). Le système des équations de MAXWELL-EINSTEIN présente, comme nous allons le voir, le caractère hyperbolique normal. On peut envisager le problème de leur intégration par une étude élémentaire au moyen d'une analyse du problème de Cauchy.

PROBLÈME. — *Etant donnés sur une hypersurface S les potentiels* $g_{\alpha\beta}$ *et leurs dérivées premières, le champ de température* θ *et ses dérivées premières, et le champ électromagnétique par les* $H_{\alpha\beta}$, *déterminer au voisinage de S les divers champs supposés satisfaire aux équations de* MAXWELL-EINSTEIN.

Il nous suffira d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des divers champs et de leurs dérivées successives. Nous supposerons les $g_{\alpha\beta}$ de classe (C^1, C^3 par morceaux), les $H_{\alpha\beta}$ de classe (C^0, C^2 par morceaux) et θ de classe (C^2, C^4 par morceaux).

Sur l'hypersurface S représentée localement par $x^0 = 0$, les données de Cauchy sont les valeurs des quantités $\mathcal{C}$ ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$; θ, $\partial_0\theta$; $H_{\alpha\beta}$). Nous désignerons par d.C les données de Cauchy ou des quantités qui peuvent s'en déduire par des opérations algébriques et des dérivations le long de S. Si l'on cherche à mettre en évidence les dérivées $\partial_{00} g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ dans les équations de MAXWELL-EINSTEIN, on est conduit à remplacer ces équations par le système équivalent composé des groupes d'équations

$$S^0_{\ \alpha} = \chi T^0_{\ \alpha} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{E}^0 \equiv \frac{1}{2} \eta^{ijk0} \partial_i H_{jk} = 0 \tag{3.11}$$

$$\mathcal{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0} \tag{3.12}$$

où les quantités $S^0_{\ \alpha}$, $\mathcal{E}^0$ ont des valaurs connues sur S et la quantité $\mathcal{D}^0$ ne dépend pas des $\partial_0 u^\alpha$ et $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, et de

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij}(d.C) = \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij}\right) \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}^k \equiv \frac{1}{2} \eta^{0ijk} \partial_0 H_{ij} + \psi^k (d.C) = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathcal{P}_i \doteq \frac{1}{\mu}[g^{00} - (1 - \varepsilon\,\mu)\,u^0 u^0]\,\partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu}\,[g^{0j} - (1 - \varepsilon\,\mu)\,u^0 u^j]\,\partial_0 H_{ji} +$$

$$+ \Phi_i\,(d.C\,,\ \partial_0 u^\alpha) = \delta\,u_i + \sigma\,u^\alpha\,H_{\alpha i}\,. \tag{3.15}$$

Une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit possible est que les équations (3.10), (3.11), (3.12) soient satisfaites sur S par les données de Cauchy. S'il en est ainsi, en tenant compte de l'équation d'état et du caractère unitaire de u^α, on peut calculer les quantités u^α, p à l'aide des équations (3. 10). L'équation (3. 11) exprime qu'il existe un potentiel vecteur local pour H_{ij} sur S. L'équation (3.12) donne la valeur de δ.

Les équations (3. 13) déterminent alors les valeurs sur S de $\partial_{00}\,g_{ij}$ si $g^{00} \neq 0$. Pour avoir les valeurs de $\partial_0\,H_{\alpha\beta}$, il faut connaître celles de $\partial_0\,u^\alpha$. Ce sont les équations (3.6), (3.7), (3.8) qui fournissent les $\partial_0\,u^\alpha$ en même temps que les $\partial_0\,p$ et $\partial_{00}\,\theta$. Les équations (3.14) donnent les valeurs de $\partial_0\,H_{ji}$ et les équations (3.15) donnent les valeurs de $\partial_0\,H_{0i}$ sur S si $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)$ $u^0\,u^0 \neq 0$. Enfin l'équation (3.9) détermine la valeur de $\partial_0\,\delta$ si $u^0 \neq 0$.

Si l'hypersurface S portant les données de Cauchy $\mathcal{C}$ n'est pas exceptionnelle, il résulte de l'analyse précédente que les quantités $\partial_{00}g_{ij}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, $\partial_{00}\theta$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 p$, $\partial_0\delta$ sont bien déterminées et nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface S. Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ) si on suppose les données dérivables à un ordre supérieur à celui de nos hypothèses.

Soit maintenant une solution $\mathcal{G}$ des équations du champ correspondant aux données de Cauchy $\mathcal{C}$ vérifiant les équations (3.10), (3.11), (3.12) qui peuvent encore s'écrire

$$Q^0{}_\alpha = 0 \qquad \mathcal{E}^0 = 0 \qquad P^0 = 0$$

où l'on pose $Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi\,T_{\alpha\beta}$ et $P_\alpha = \mathcal{P}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^\rho H_{\rho\alpha})$. En vertu du caractère conservatif des premiers membres des équations d'Einstein et de Maxwell, on a

$$\nabla_\alpha\,Q^\alpha{}_\beta = 0 \qquad \nabla_\alpha\,\mathcal{E}^\alpha = 0 \qquad \nabla_\alpha\,P^\alpha = 0\,.$$

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$g^{00}\,\partial_0\, Q^0{}_\alpha = A^{i\beta}{}_\alpha\, \partial_i\, Q^0{}_\beta + B^\beta{}_\alpha\, Q^0{}_\beta$$

$$\partial_0\, P^0 = C^i\, \partial_i\, P^0 + \left(\partial_i\, C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, C^\beta\right) P^0$$

$$\partial_0\, \mathcal{E}^0 = -\,\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\, \mathcal{E}^0$$

où les $A^{i\beta}{}_\alpha$, $B^\beta{}_\alpha$, C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $Q^0{}_\alpha$, P^0, $\mathcal{E}^0$. Comme $Q^0{}_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S, elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy $\mathcal{C}$, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy $\mathcal{C}$ rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer u^α, p, δ, puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ).

II. Etude des caractéristiques des équations de Maxwell

4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

1) les variétés $g^{00} = 0$ tangentes aux cônes élémentaires,

2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,

3) les variétés engendrées par les lignes de courant,

4) les variétés $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0\, u^0 = 0$ que nous allons étudier.

Sur les équations (3. 15), on voit que si l'hypersurface S portant les données de Cauchy est telle que sur S

$$g^{00} - (1 - \varepsilon\,\mu)\, u^0\, u^0 = 0$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S. Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété S est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par V_3^M.

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques V_3^M définies par $f\,(x^\alpha) = 0$, sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\,\mu)\, u^\alpha\, u^\beta)\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = \theta\ . \tag{4.1}$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Pour qu'elles aient une signification physique, il faut supposer que les variétés V_3^M soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes au cône élémentaire $ds^2 = 0$ de V_4. Nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences de la Physique relativiste. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = (1 - \varepsilon\,\mu)\, \left(u^\alpha\, \partial_\alpha f\right)^2 \leqslant 0\ .$$

On en déduit

$$\varepsilon\,\mu \geqslant 1\ . \tag{4. 2}$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela, considérons deux surfaces d'ondes voisines $(V_3^M)_0$ et $(V_3^M)_\theta$ définies par les équations

$$f\,(x^\alpha) = 0 \qquad f\,(x^\alpha) = \theta$$

et prenons θ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point x de $(V_3^M)_0$ coupe $(V_3^M)_\theta$

en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta \vec{u}$, η étant donné par la relation

$$\eta\, u^{\alpha}\, \partial_{\alpha} f = \theta\ . \tag{4.3}$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en x à la surface d'onde $(V_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en x

$$n_{\lambda} = \frac{\partial_{\lambda} f}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha} f\, \partial_{\beta} f}}\ . \tag{4.4}$$

La trajectoire orthogonale des V_3^M issue de x coupe $(V_3^M)_{\theta}$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1 \vec{n}$, η_1 étant déterminé par la relation

$$\eta_1\, n^{\lambda}\, \partial_{\lambda} f = \theta\ .$$

On en déduit

$$\eta_1 = \frac{\theta}{n^{\lambda}\, \partial_{\lambda} f} = \frac{\theta \sqrt{-g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha} f\, \partial_{\beta} f}}{g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha} f\, \partial_{\beta} f} = \frac{-\theta}{\sqrt{-g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha} f\, \partial_{\beta} f}}\ . \tag{4.5}$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta\vec{u} - \eta_1\vec{n}$. En vertu de (4. 3) et (4. 4), on a

$$\eta\, (\vec{u} \cdot \vec{n}) = -\, \eta_1$$

et

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = (\eta\, \vec{u} - \eta_1\, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \eta\, (\vec{u} \cdot \vec{n}) + \eta_1 = 0\ .$$

Le vecteur $\vec{t}$ est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps car son carré

$$\eta^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2\, \eta_1{}^2 - 2\, \eta\, \eta_1\, (\vec{u} \cdot \vec{n}) = \eta^2 + \eta_1{}^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta\vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orienté dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation V de l'onde se trouve ainsi définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\theta \to 0} \left| \frac{\eta_1}{\eta_0} \right|\ .$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant η_1 et η_0 par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} .$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à $(\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$. Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses $\varepsilon\mu \geqslant 1$, la vitesse de propagation V est inférieure à une vitesse limite $c = 1$; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\varepsilon\mu = 1$).

5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de Maxwell fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu)\, u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de Maxwell. Soit $\bar{g}_{\alpha\beta}$ les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta .$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta .$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par $\bar{V}_4$ la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps V_4 et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$. Nous appellerons cône élémentaire associé $\overline{C}_x$ en un point x le cône réel de directions tangentes à $\overline{V}_4$ défini par l'équation $d\overline{s}^2 = 0$.

Dans l'espace riemannien $\overline{V}_4$, les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL définies localement par $f(x^\alpha) = 0$, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\overline{\Delta}_1 f \equiv \overline{g}^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha f\, \partial_\beta f = 0 \,. \tag{5.1}$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé $\overline{C}_x$. Les cônes élémentaires $\overline{C}_x$ de $\overline{V}_4$ sont donc cônes caractéristiques pour les équations de MAXWELL et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes.

Une variété caractéristique V_3^M, c'est-à-dire une solution de (5. 1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (5. 1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de $\overline{V}_4$ constituées par l'ensemble d'une courbe $\overline{L}_0$ et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes $\overline{L}_0$ sont appelées les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Pour les déterminer, posons

$$2\,H\left(x^\lambda, y_\mu\right) = \overline{g}^{\alpha\beta}\, y_\alpha\, y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\Delta}_1 f \equiv 2\,H\left(x^\lambda, \partial_\mu f\right) = C \tag{5.2}$$

où C est une constante arbitraire. Relativement aux variables x^α, f, y_β les bandes caractéristiques des équations de MAXWELL sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\dfrac{\partial H}{\partial y_0}} = \cdots = \frac{dx^3}{\dfrac{\partial H}{\partial y_3}} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\dfrac{\partial H}{\partial x^0}} = \cdots = -\frac{dy_3}{\dfrac{\partial H}{\partial x^3}} = du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2\,H\left(x^\lambda, y_\mu\right) = C$$

pour la valeur C de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire u, les fonctions $x^\alpha(u)$, $y_\alpha(u)$ sont données par le système canonique

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \qquad \frac{dy_\alpha}{du} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \tag{5.3}$$

relatif à la fonction hamiltonienne $H(x^\lambda, y_\mu)$. Le premier groupe des équations (5. 3) s'écrit explicitement

$$\dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}\right). \tag{5.4}$$

Inversement

$$y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha. \tag{5.5}$$

Cela posé, les solutions $x^\alpha(u)$ de (5. 3) sont extrêmales de la fonction lagrangienne L définie par

$$2L = \bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ aux variables canoniques (x^α, y_β) qui leur sont liées par (5.4) et (5.5), on a entre H et L la relation classique

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial L} - L = L.$$

Ces solutions sont les extrêmales satisfaisant à l'intégrale première

$$2L = C \tag{5. 6}$$

pour la valeur C de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrêmales ainsi définies sont aussi les extrêmales de

$$\sqrt{2L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (5. 6). Il en résulte que les $x^\alpha(u)$ définissent des géodésiques de $\bar{V}_4$. Si $C = 0$, le système différentiel aux caractéristiques de (5. 1) admet l'intégrale première $f =$ const. et les variétés V_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\overline{V}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$, le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\overline{C}_x$ le long de la tangente à $\overline{L}_0$.

Nous avons démontré le théorème

THÉORÈME. — *Les bicaractéristiques des équations de* MAXWELL *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne* $\overline{V}_4$ *munie de la métrique associée*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \,.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\overline{L}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

THÉORÈME. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction* n *variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien* $\overline{V}_4$ *muni de la métrique*

$$d\overline{s}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ *est le tenseur métrique fondamental et* u_α *le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.*

III. ETUDE GÉOMÉTRIQUE DES RAYONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS L'ESPACE

6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps V_4 est *stationnaire* dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de D_4, la famille des lignes z ou lignes de temps satisfaisant aux hypothèses suivantes:

a) les lignes de temps sont homéomorphes à la droite réelle R;

b) on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions D_3, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4, telle qu'il existe un homéomorphisme de même classe de la variété D_4 sur le produit topologique $D_3 \times R$ dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. La variété quotient D_3 sera dite simplement *espace.*

On peut définir dans D_4 des systèmes de coordonnées locales (x^0, x^i), dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante. Les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraire de D_3. La donnée des (x^i) détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant homéomorphes à D_3. Les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs aux coordonnées adaptées sont indépendants de la variable x^0 et le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries admet pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1 \qquad \xi^i = 0$$

et a pour carré $\xi^2 = g_{00} > 0$.

Dans la suite on n'introduit que des systèmes de coordonnées adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{6.1}$$

à partir de la variable directrice dx^0, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{g_{00}} \left(g_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + d\hat{s}^2 \tag{6.2}$$

où

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\, dx^i\, dx^j \equiv \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i\, dx^j \tag{6.3}$$

définit sur D_3 une métrique riemannienne définie négative.

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}$, θ ainsi que les coefficients $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\overline{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\overline{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\overline{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\overline{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\overline{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \overline{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (u_0)^2 .$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\overline{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable V_{n+1}, soit $W_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de V_{n+1}. Si l'on adopte sur V_{n+1} des coordonnées locales (x^α) chaque élément de $W_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées (x^α) du point x correspondant de V_{n+1} et des $n+1$ composantes $(\dot{x}^\alpha)$ du vecteur $\dot{x}$ dans le repère naturel en x associé aux (x^α). Une structure de *variété finslérienne sur* V_{n+1} est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $W_{2(n+1)}$ telle que pour x fixe, $\mathcal{L}(x, \lambda \dot{x}) = \lambda \mathcal{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$.

Considérons une variété différentiable V_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de générateur $\vec{\zeta}$, ne laissant invariant aucun point de V_{n+1} ($\vec{\zeta} \neq 0$). Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle R, et soit V_n la variété quotient de V_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. Nous identifierons V_n à l'espace dont les points z sont les trajectoires d'isométries. Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la fonction $\mathcal{L}$ est localement indépendante de la variable x^0:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0) .$$

Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient V_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions L $(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de V_{n+1} extrêmales de l'intégrale

$$(7.1) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, \dot{x})\, du \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{du}\right)$$

correspondent par projection sur V_n des extrêmales de

$$(7.2) \qquad \int_{z_0}^{z_1} L(z, \dot{\ })\, du \qquad \left(\dot{\ } = \frac{dz}{du}\right) .$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \ldots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$ et nous supposons

$$\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0 , \qquad \partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} .$$

Donnons-nous une extrêmale de (7. 1) par une représentation paramétrique $x^\alpha (u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrêmales de (7. 1)

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha \tag{7.3}$$

où $\dot{x}^\alpha$ satisfait à

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{7.4}$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$\omega = \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} \, dx^k + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} \, dx^0 . \tag{7.5}$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = h . \tag{7.6}$$

Comme $\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (7.6) par rapport à $\dot{x}^0$; on obtient l'équation équivalente

$$\dot{x}^0 = \varphi (x^k , \dot{x}^l , h) \tag{7.7}$$

où φ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^l$ et dépendant effectivement de h.

Considérons la famille des extrêmales (E_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h. Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur hdx^0 et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrêmales admet l'invariant intégral relatif

$$\partial_{\dot{k}} \mathcal{L} \, dx^k . \tag{7.8}$$

Or d'après l'homogénéité de $\mathcal{L}$, on a

$$\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \dot{x}^0 \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = \mathcal{L} .$$

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^l$, h

$$\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7,9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} \mathrm{L} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, \partial_{\dot{k}} \varphi - h\, \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} .$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} \mathrm{L}\, dx^k .$$

Autrement dit, elles sont extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)\, du \tag{7.10}$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible [3].

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{\mathrm{V}}_4$.

Nous supposons que la variété $\overline{\mathrm{V}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{8.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

---

[3]) Voir A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.

Nous supposons que $\bar{g}_{00}$ ne s'annule pas dans le domaine étudié. Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{00}\dot{x}^0 + \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathcal{L} \tag{8.2}$$

et à éliminer $\dot{x}^0$ entre cette équation et

$$\mathrm{L} = \mathcal{L} - h\dot{x}^0 . \tag{8.3}$$

En décomposant $\mathcal{L}^2$ en carrés à partir de la variable directrice $\dot{x}^0$, il vient

$$\mathcal{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i}\bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathcal{L}^2 = h\mathcal{L}$, on tire l'équation

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{1 - \dfrac{h^2}{\bar{g}_{00}}}} \tag{8.4}$$

qui fournit $\mathcal{L}$ en fonction des variables x^k, $\dot{x}^l$, h. De (8. 2), on tire ensuite

$$\dot{x}_0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}}\mathcal{L} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} . \tag{8.5}$$

On en déduit d'après (8. 3) et en vertu de (8. 4)

$$\mathrm{L} = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right)\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + h\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \tag{8.6}$$

où ε est le signe de $\bar{g}_{00}$.

L est bien une fonction de x^k, $\dot{x}^l$, h homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^l$. Elle définit sur la variété quotient $\bar{\mathrm{V}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\bar{\mathrm{V}}_3$ la fonction L $(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathcal{L}\,(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$

homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$, qui par descente reconduit à L et que cette fonction est

$$\mathcal{L} = \sqrt{\overline{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}\ .$$

Les courbes extrêmales correspondantes sont donc des géodésiques de $\overline{V}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\overline{V}_4$ qui correspondent à l'intégrale première $\partial_{\dot{0}}\mathcal{L} = h$ se projettent sur la variété quotient $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$(8.7) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(-\,\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} + h\, \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du$$

où h a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$(8.8) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}}\right) du\ .$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de $\dot{x}^0$:

$$(8,9) \qquad dx^0 = \frac{h}{\overline{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \dfrac{h^2}{\overline{g}_{00}}}\, \hat{\overline{g}}_{ij}\, dx^i dx^j} - \frac{\overline{g}_{0i}\, dx^i}{\overline{g}_{00}}\ .$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathcal{L} \to 0$. De la relation $h\mathcal{L} = \overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$, il résulte que $h \to \infty$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$ et h a le signe de $\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathcal{L}^2 \equiv \frac{1}{\overline{g}_{00}} \left(\overline{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha\right)^2 + \hat{\overline{g}}_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j = 0\ .$$

On en déduit que $\overline{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (8. 8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ sur $\overline{V}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\lim_{h \to \infty} \left(\frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\overline{g}_{00}}\right) \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) \right] du \, .$$

En passant à la limite, on en déduit le lemme suivant

LEMME. — *Les géodésiques de longueur nulle de $\overline{V}_4$ se projettent sur $\overline{V}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\overline{g}_{0i} \dot{x}^i}{\overline{g}_{00}} \right) du \tag{8.10}$$

où ε est le signe de $\overline{g}_{00}$ et ε' le signe de $\overline{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.

D'après (8. 9), le long de ces extrêmales on a

$$dx^0 = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\overline{g}_{00}} \hat{\overline{g}}_{ij} dx^i dx^j} - \frac{\overline{g}_{0i} dx^i}{\overline{g}_{00}} \, . \tag{8.11}$$

On remarquera que $dx^0 = \mathrm{L}du$.

Dans le cas où $\overline{g}_{00}$ s'annule dans le domaine étudié, on obtient un énoncé analogue où (8. 10) et (8. 11) sont respectivement remplacées par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du$$

et

$$dx^0 = - \frac{\overline{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2 \overline{g}_{0i} \dot{x}^i} du \, .$$

9. Le principe de FERMAT.

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet, le lemme fournit une démonstration immédiate du théorème suivant

THÉORÈME. — *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que $\overline{g}_{00} \neq 0$, les rayons électromagnétiques dans* *l'espace sont des lignes réalisant l'extrêmum de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\right) du \tag{9,1}$$

pour des variations à extrémités fixes, où ε *est le signe de* $\bar{g}_{00}$ *et* ε' *le signe de* $\bar{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. *Le temps mis par un rayon pour aller du point* z_0 *au point* z_1 *est donné par*

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left(\varepsilon\varepsilon' \sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\right) du . \tag{9.2}$$

Ce temps est extrêmum.

Dans le cas où $\bar{g}_{00} = 0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (9. 1) et (9. 2) respectivement par

$$\int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du \tag{9.3}$$

et

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} - \frac{\bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}{2\, \bar{g}_{0i} \dot{x}^i} du . \tag{9.4}$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps V_4 est orthogonal. Soit

$$ds^2 = \mathrm{U}\,(dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

la métrique d'univers de V_4. Les u_i étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{\mathrm{U}}{n^2} (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

On peut mettre (9. 2) sous la forme

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\, d\sigma \tag{9.5}$$

où l'on a posé $d\sigma^2 = - g_{ij}\, dx^i\, dx^j$. On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps V_4 est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} n\, d\sigma = 0\ .$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de FERMAT en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des $g_{\alpha\beta}$.

10. Interprétation du signe ε' de $\bar{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$.

L'équation

$$\mathcal{L}^2\, du^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} \left(\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique $\bar{C}_x$ au point x des équations de MAXWELL. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire π_x

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = 0\ .$$

Désignons par $M\,(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\bar{C}_x$. Prenons un couple de points voisins de M, ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + dx^i)$ appartenant respectivement aux deux nappes de $\bar{C}_x$ et symétriques par rapport à π_x. Soient

$$M_1\,(x^0 + dx^0\,,\ x^i + dx^i) \qquad M_1'\,(x^0 - d'x^0\,,\ x^i + dx^i)\ .$$

On peut dire que MM_1 représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ dans le temps dx^0. De même, $M_1'M$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A′ $(x^i + dx^i)$ au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M_1' sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = -\, \bar{g}_{0\alpha}\, d'\, x^\alpha \, .$$

On en déduit

$$d'\, x^0 = dx^0 + 2\, \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} \, .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^i) au point d'espace A′ $(x^i + dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A′ $(x^i + dx^i)$ à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \, . \tag{11.1}$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}(dx^0)^2 + 2\,\frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\,\beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2}\left(\beta_i\, dx^i\right)^2 \, . \tag{11.2}$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\,\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum_i (dx^i)^2$. Il vient

$$(11.3) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) .$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(11.4) \qquad 1 - \beta^2 - (1-\beta^2) W^2 - (1-V^2)\left(1 - W \beta_i \lambda^i\right)^2 = 0 .$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$(11.5) \qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}[\vec{\beta}^2 + 2\vec{W}\cdot\vec{\beta} + (1-\beta^2)\vec{W}^2 + (\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2] .$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$(11.6) \qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\cdot\vec{\beta}}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right] .$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

---

[4] Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).
2. G. DARMOIS, Les équations de la gravitation einsteinienne. (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. XXV, 1927).
3. W. GORDON, Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie. (*Ann. Physik*, 72, pp. 421-456, 1923).
4. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel.* Armand Colin, 1951).
5. —— *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme.* (Masson, 1955).
6. PHAM MAU QUAN, Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé. (*Jour. Rational Mechanics and Analysis*, vol. 5, No. 3, 1956, pp. 473-538).