

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 4 (1958)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ITERATORIK BEI LEONHARD EULER  
**Autor:** Biermann, Kurt-R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-34623>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ITERATORIK BEI LEONHARD EULER

von Kurt-R. BIERMANN, Berlin

(Reçu le 3 juin 1957)

Im Schaffen Leonhard Eulers nehmen bekanntlich die Gutachten zu technischen Entwürfen, zu baulichen Projekten, zu ökonomischen Plänen, zu Verbesserungsvorschlägen, Erfindungen usw. einen beachtlichen Raum ein <sup>1)</sup>. Oftmals wurde Euler durch die Beschäftigung mit den ihm vorgelegten Fragen oder den ihm erteilten Aufträgen zu weitergehenden theoretischen Untersuchungen angeregt, die ihrerseits wieder praktische Bedeutung gewannen. So bietet das wissenschaftliche Werk Eulers eine eindrucksvolle Veranschaulichung der Wechselwirkung zwischen Theorie und Praxis.

Zu den Aufgaben, die Leonhard Euler übertragen wurden, gehört auch die Begutachtung der Zahlenlotterie (1749 bzw. 1763) <sup>2)</sup>, die vor und nach ihm zahlreichen Mathematikern zu wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen Veranlassung gegeben hat <sup>3)</sup>. Euler widmete der Loterie Génoise drei Arbei-

---

1) Neue Materialien hierzu, deren Publikation anlässlich des Euler-Jubiläums erfolgt, finden sich z.B. bei:

N. M. RASSKIN, L. Euler und die Prüfung der Entwürfe für eine ständige Brücke über die Nawa in der Petersburger Akademie der Wissenschaften (russ.), *Iswestija d. Akad. d. Wiss. d. UdSSR*, Klasse für techn. Wissensch., 1957, Nr. 3, Sonderdruck anlässlich der wissenschaftl. Jubiläumssitzung der Klassen für physikal.-mathem. und für techn. Wissenschaften, S. 38/48;

Kurt-R. BIERMANN, *Einige Euleriana aus dem Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, erscheint in der anlässlich des Euler-Jubiläums vorgesehenen Festschrift der Akademie.

2) Vgl. Gustav ENESTRÖM, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1. Lief., Leipzig, 1910, 2. Lief., Leipzig, 1913 (hier künftig abgekürzt *EnB*), Nr. 821; L.-G. DU PASQUIER im Vorwort zu: *Leonhardi Euleri Opera omnia* (hier künftig abgekürzt *EO*), I, 7, S. xxv, sowie E. WINTER, *Die Registres des Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766*, Berlin, 1957, S. 44.

3) Z. B. Nicolaus (I) Bernoulli, Nicolas de Beguelin, Johann (III) Bernoulli, Pierre-Simon de Laplace, Georg von Vega, A. Meyer-Liége.

Vgl. hierzu auch Kurt-R. BIERMANN, Untersuchungsergebnisse von Klassikern der Wahrscheinlichkeitstheorie über das «Lotto di Genova», erscheint in *Istoriko-matematitscheskije issledowanija*, X, Moskau, 1957.

ten<sup>4)</sup>; den Anstoss hierzu haben wir offenbar in der von ihm geforderten Expertise zu suchen. Die eine dieser Abhandlungen<sup>4 a)</sup> ist nun insofern von Interesse, als in ihr das Problem der Merkmaliterationen enthalten ist.

Die Theorie der „runs“, speziell auch die der „runs of consecutive elements“, nimmt heute in der mathematischen Statistik wegen ihrer grossen praktischen Bedeutung einen wichtigen Platze in<sup>5)</sup>. Auch zu philosophischen Auseinandersetzungen hat die Beobachtung des ununterbrochenen Aufeinanderfolgens des nämlichen Merkmals geführt, und zwar im Anschluss an die Folgerungen, die K. Marbe an die von ihm vorgenommene statistische Erfassung von Geburtsanmeldungen knüpfte<sup>6)</sup>.

Die allgemeine Fragestellung, die Euler in der uns heute beschäftigenden Abhandlung untersucht, lautet: In einer Lotterie möge es  $n$  Lose geben. Jedes Los sei durch eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ...,  $n$  gekennzeichnet. Es mögen  $m$  Nummern gezogen werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen  $m$  Nummern Sequenzen vorkommen?

Als eine Sequenz von 2 Zahlen bezeichnet Euler das Auftreten zweier in der Reihe der natürlichen Zahlen aufeinanderfolgender Zahlen. Werden zum Beispiel  $m = 5$  Nummern gezogen und diese seien 7, 18, 22, 23, 58, so bilden 22 und 23 eine Sequenz von 2 Zahlen, von Euler dargestellt durch das Symbol 1 (2). Kommen in einer Ziehung drei aufeinanderfol-

4) a) Sur la probabilité des séquences dans la lotterie génoise, *EO*, I, 7, S. 113/52 (*EnB* 338);

b) Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilitum, *EO*, I, 7, S. 408/24 (*EnB* 600);

c) Réflexions sur une espèce singulière de loterie, nommée Loterie génoise, *EO*, I, 7, S. 466/94 (*EnB* 812).

Einige Resultate der Abhandlungen *EnB* 338 und 600 werden in der im Zit.<sup>3</sup> angeführten Studie rekapituliert.

5) Einen Überblick über den Stand der Theorie der Merkmaliterationen und Hinweise auf 57 einschlägige Abhandlungen gibt Otto LUDWIG, Über die stochastische Theorie der Merkmalsiterationen, *Mitteilungsblatt für mathematische Statistik und ihre Anwendungsgebiete*, 8, 1956, S. 49/82.

Zu den „runs of consecutive elements“ vgl. J. WOLFOWITZ, Additive partition functions and a class of statistical hypotheses, *The annals of Mathematical Statistics*, XIII, 1942, S. 247/90; derselbe, Note on runs of consecutive elements, *a.a.O.*, XV, 1944, S. 97/8; I. KAPLANSKI, The asymptotic distribution of runs of consecutive elements, *a.a.O.*, XVI, 1945, S. 200/3.

6) Vgl. Carl STUMPF, Studien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. Klasse*, Nr. 2, Berlin 1938, S. 24/59. Dort auch zahlreiche Literaturhinweise zu dem den Publikationen Marbes folgenden Meinungsstreit.

gende Zahlen heraus, wie etwa 47, 48, 49, so ist das für Euler eine Sequenz von 3 Zahlen, symbolisiert durch 1 (3). Das Ziehen von Nummern wie 19, 20, 64, 65 bezeichnet Euler als Auftreten von 2 Sequenzen von je 2 Zahlen; d.i. 2 (2). Ein Überschneiden kennt Euler nicht; das Herauskommen von 77, 78, 79, 80 ist für ihn nur 1 (4); er betrachtet also nicht 77, 78, ausserdem 78, 79 und 79, 80 als Sequenzen zweier Zahlen. Auch die in dem letzten Beispiel enthaltenen Sequenzen dreier Zahlen (77, 78, 79 und 78, 79, 80) werden ebensowenig berücksichtigt wie die Reihenfolge, in der die Nummern gezogen werden. Es sei  $m = 6$  und gezogen seien 41, 37, 39, 38, 16, 40: das ist für Euler das Auftreten einer Sequenz von 5 Zahlen, nämlich 37, 38, 39, 40, 41, charakterisiert durch 1 (5). Das Vorkommen einer isolierten Zahl, — im vorstehenden Beispiel 16 —, wird durch 1 (1) symbolisiert.

Euler beginnt mit seinen Ableitungen bei  $m = 2$ , fährt fort mit  $m = 3, 4, 5$ ; macht dann eine Anwendung auf die Zahlenlotterie ( $n = 90, m = 5$ ), stellt für diesen Fall numerische Berechnungen an, bringt dann die Lösung für  $m = 6$ , formuliert und löst sodann das „Problème général“, um schliesslich seine Studie mit der speziellen Lösung für  $m = 7$  zu beenden.

Die allgemeine Lösung gibt Euler in dieser Form: Wenn  $\alpha(a)$  die Anzahl der Sequenzen von  $a$  Zahlen,  $\beta(b)$  die Anzahl der Sequenzen von  $b$  Zahlen, usw., bedeutet, folglich  $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots = m$ , wenn ferner  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = k$ , so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von  $\alpha(a) + \beta(b) + \dots$  Sequenzen

$$W_1 = \frac{(n - m + 1) \cdot (n - m) \cdot (n - m - 1) \cdot \dots \cdot (n - m - k + 2)}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \gamma! \cdot \dots} : \binom{n}{m}.$$

Die Anzahl der zu unterscheidenden Fälle bei  $m$  gezogenen Zahlen findet Euler gleich der Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl  $m$  in ganzzahlige positive Summanden zu zerlegen <sup>7)</sup>.

<sup>7)</sup> Vgl. L. EULER, Observationes analyticae variae de combinationibus, EO, I, 2, S. 163/93 (EnB 158); De partitione numerorum, EO, I, 2, S. 254/94 (EnB 191); De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas, EO, I, 3, S. 131/47 (EnB 394); Introductio in analysin infinitorum, EO, I, 8, Caput XVI, S. 313/38 (EnB 101); vgl. ferner Ferdinand RUDIO im Vorwort zu EO, I, 2, S. xviii/xx, und zu EO, I, 3, S. xix/xx.

In der im Zit. <sup>3</sup> angeführten Studie wurde bereits darauf hingewiesen, dass Jacob (I) BERBOULLI in der *Ars conjectandi* eine Regel angibt, wie die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung einer natürlichen Zahl in ganzzahlige positive Summanden zu finden ist (*Ars conjectandi*, herausgegeben unter Mitwirkung von Nicolaus BERNOULLI, Basel, 1713, S. 21/4, Dtsch. von R. HAUSSNER, Ostw. Klass., Nr. 107, S. 22/6).

Es sei beispielsweise  $m = 5$ . Die Zahl 5 lässt sich auf 7 verschiedene Arten in ganzzahlige positive Summanden zerlegen:

Fall		$\alpha$	$\beta$	$h$
I	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ (1)	5		5
II	$2 + 1 + 1 + 1 = 1$ (2) + 3 (1)	1	3	4
III	$3 + 1 + 1 = 1$ (3) + 2 (1)	1	2	3
IV	$4 + 1 = 1$ (4) + 1 (1)	1	1	2
V	$5 = 1$ (5)	1		1
VI	$2 + 2 + 1 = 2$ (2) + 1 (1)	2	1	3
VII	$3 + 2 = 1$ (3) + 1 (2)	1	1	2

Schliesslich untersucht Euler noch die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von Sequenzen mit gleichem  $k$  (im vorstehenden Beispiel Fall I:  $k = 5$ ; Fall II:  $k = 4$ ; Fall III und Fall VI:  $k = 3$ ; Fall IV und Fall VII:  $k = 2$ ; Fall V:  $k = 1$ ).

Für diese Wahrscheinlichkeit findet er

$$W_2 = \frac{(m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{(n-m+1) \cdot (n-m) \cdot \dots \cdot (n-m-k+2)}{k!}.$$

In der Theorie der Merkmaliterationen ist der in der Praxis am häufigsten vorkommende oder herbeigeführte Fall derjenige zweier Merkmale. Wir können auch in der vorliegenden Aufgabe das Problem auf das Auftreten zweier Merkmale zurückführen, indem wir folgende Einfügungen vornehmen:<sup>8)</sup>

Entweder A zwischen den Elementen einer Sequenz, deren Elementenanzahl  $\geq 2$   
 $\equiv$  zwischen 2 in der Reihe der natürlichen Zahlen aufeinanderfolgenden Zahlen,

oder

B zwischen 2 Sequenzen oder 2 isolierten Zahlen  
 oder 1 Sequenz und 1 isolierten Zahl

<sup>8)</sup> In der Iteratorik werden üblicherweise  $a$ - und  $b$ -Iterationen unterschieden. Da wir die Buchstaben  $a$  und  $b$  bereits in anderer Bedeutung benutzt haben, bedienen wir uns der grossen Buchstaben A und B.

$\equiv$  zwischen 2 Sequenzen, wobei die Elementenanzahl  $\geq 1$

$\equiv$  zwischen 2 Zahlen, deren Differenz  $> 1$ .

Es sei z.B.  $m = 5$ ,  $n = 90$ , und es seien die Zahlen gezogen worden:

Fall	
I	5      6      7      8      9 A      A      A      A
II	17      35      36      37      38 B      A      A      A      = A A A B
III	72      73      74      81      82 A      A      B      A      = A B A A
IV	44      45      46      61      89 A      A      B      B      = B B A A = B A A B
V	2      37      38      42      43 B      A      B      A      = A B A B = A B B A
VI	12      17      18      54      69 B      A      B      B      = B B A B = A B B B = B B B A
VII	1      19      21      76      84 B      B      B      B

Es zeigt sich, dass die Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten einer natürlichen Zahl  $m$  in ganze positive Summanden gleich ist der Zahl derjenigen Variationen zweier Elemente (z.B. A und B) zur  $(m - 1)$ -ten Klasse mit Wiederholung, die sich durch die Längen  $i_1, i_2, \dots$  der Iterationen  $v_1, v_2, \dots$  des Elementes A unterscheiden. In den Variationen von A und B zur 4. Klasse A B A A und B A A A kommt das Element A z.B. je dreimal vor; die Variationen unterscheiden sich aber dergestalt, dass im ersteren Falle die Länge  $i_1$  der Iteration  $v_1 = 1$  und die

Länge  $i_2$  der Iteration  $v_2 = 2$ , während im zweiten Falle die Länge  $i_1$  der Iteration  $v_1 = 3$ . Indessen werden bei dieser Betrachtung die Variationen A B A A und A A B A ebensowenig unterschieden wie die Variationen B A A A und A A A B.

Die Anzahl der Variationen zur  $(m - 1)$ -ten Klasse mit Wiederholung, in denen das Element A gleich oft ohne Rücksicht auf Länge und Anzahl der Iterationen vorkommt, ist  $\binom{m-1}{\kappa}$ , wobei  $\kappa = 1, 2, \dots, m - 1$  die Anzahl des Auftretens des Elements B bedeutet. Ist z.B.  $m - 1 = 4$  und  $\kappa = 1$ , so ist  $\binom{m-1}{\kappa} = 4$ . Damit sind die obigen Fälle II ( $i_1$  von  $v_1 = 3$ ) und III ( $i_1$  von  $v_1 = 1$  und  $i_2$  von  $v_2 = 2$ ) erfasst.

Es liegt nicht in der Zielsetzung der vorliegenden Notiz, näher auf die Theorie der Merkmaliterationen, auf die heute üblichen Definitionen usw. einzugehen. Es sei lediglich noch darauf hingewiesen, dass Euler auch die zyklische Anordnung der Elemente (d.h. z.B. wenn  $n = 90$ , würden 90 und 1 eine Sequenz von 2 Zahlen bilden) bereits in Erwägung gezogen hat. Er hält es aber für „plus naturel“, sie von der Untersuchung auszuschliessen. Die zyklische Form der Anordnung wurde dann von Johann (III) Bernoulli<sup>9)</sup> und Nicolas de Beguelin<sup>10)</sup> behandelt.

Wir sehen also, dass die Ausführungen A. M. Moods zur historischen Entwicklung der Iteratorik einer Ergänzung bedürfen, wenn er schreibt: „The theory seems to have been started toward the end of the nineteenth century rather than in the days of Laplace when there was so much interest in games of chance“<sup>11)</sup>.

Dieser Hinweis erschien gerade zur 250. Wiederkehr des Geburtstages Leonhard Eulers (\* 15.4.1707) gerechtfertigt.

9) Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gênes, *Histoire de l'Académie Royale*, etc., Année 1769, Berlin, 1771, S. 234/53. Vgl. Zit. 3).

10) Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gênes, *Histoire*, etc., Année 1765, Berlin, 1767, S. 231/80. Vgl. Zit. 3).

11) A. M. Mood, The distribution theory of runs, *The annals of Mathematical Statistics*, XI, 1940, S. 367/92, Zit. S. 367.