

# DIE GEOMETRIE DES PTOLEMAEUS VON ALEXANDRIA

Autor(en): **Czwalina, Arthur**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-34641>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DIE GEOMETRIE DES PTOLEMAEUS VON ALEXANDRIA

VON

Arthur CZWALINA, Berlin

(Reçu le 20 avril 1957)

Der grösste Astronom des griechischen Altertums, Ptolemäus, hat in seinem 13 Bücher umfassenden Werke „Mathematische Syntaxis“ seine astronomischen Beobachtungen und Berechnungen niedergelegt. Zu seinen Berechnungen bedarf er der sphärischen Geometrie. Es ist im Grunde nur ein einziger Lehrsatz, auf dem diese Geometrie aufgebaut ist; er findet sich im 13. Kapitel des ersten Buches. Wir wollen ihn zu unserer Orientierung zunächst in moderner Form aussprechen:

Ist ABC ein sphärisches Dreieck (Fig. 1) und schneiden zwei sphärische Ecktransversalen CD und BE einander in Z, so ist

$$\frac{\sin (CE)}{\sin (EA)} = \frac{\sin (CZ)}{\sin (ZD)} \cdot \frac{\sin (DB)}{\sin (BA)}$$

Ptolemäus kennt aber nicht die trigonometrischen Funktionen, die erst viel später von den Arabern in die Wissenschaft eingeführt wurden. Wenn in einem Kreise von Radius

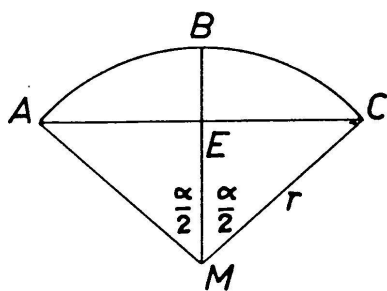


Fig. 2

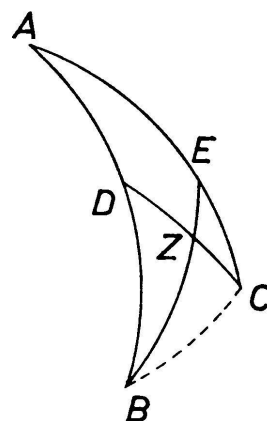


Fig. 1

$r$  zum Zentriwinkel  $\alpha$  der Bogen  $b$  und die Sehne AC gehört (Fig. 2), so ist diese Sehne von der Grösse  $2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ . Der Halbierungspunkt des Bogens AC sei B, der der Sehne AC sei E. AC ist eine Funktion des Bogens  $\widehat{AB}$ ; wir wollen sie die Ptolemäische Funktion

nennen und mit  $p(\widehat{AB})$  bezeichnen. Diese Funktion verwendet Ptolemäus zu seinen Rechnungen. Wir wollen nun den Beweis des obigen Satzes wiedergeben, indem wir uns möglichst genau an den Gedankengang des Ptolemäus anschliessen. Dieser Gedankengang führt über mehrere Hilfssätze aus der ebenen Geometrie zum Ziel.

1. Satz (Fig. 3).

Wenn zwei Geraden AB und AC durch die Geraden BZE und CZD geschnitten werden (wobei D auf AB, E auf AC liegt), so ist

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{DZ} \cdot \frac{ZB}{BE}.$$

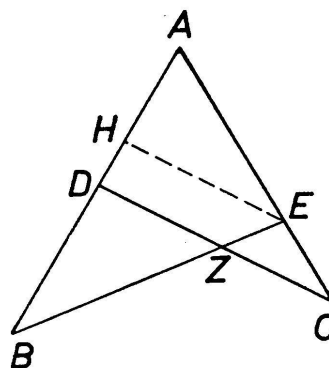


Fig. 3

*Beweis:* Wir legen durch E die Parallele zu CD, sie schneide AB in H. Dann ist nach dem Strahlensatz

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{EH} = \frac{CD}{DZ} \cdot \frac{DZ}{EH}.$$

Weiter ist nach dem Strahlensatz

$$\frac{DZ}{EH} = \frac{ZB}{BE},$$

also folgt

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{DZ} \cdot \frac{ZB}{BE}.$$

2. Satz (Fig. 4).

Wenn zwei Geraden AB und AC durch die Geraden BZE und CZD geschnitten werden (wobei D auf AB, E auf AC liegt), so ist

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CZ}{DZ} \cdot \frac{DB}{BA}.$$

*Beweis:* Wir legen durch A die Parallele zu EB, sie schneide CD in H. Dann ist nach dem Strahlensatz

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CZ}{ZH} = \frac{CZ}{ZD} \cdot \frac{ZD}{ZH}.$$

Ferner ist nach dem Strahlensatz

$$\frac{ZD}{ZH} = \frac{DB}{BA},$$

somit

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CZ}{DZ} \cdot \frac{DB}{BA}.$$

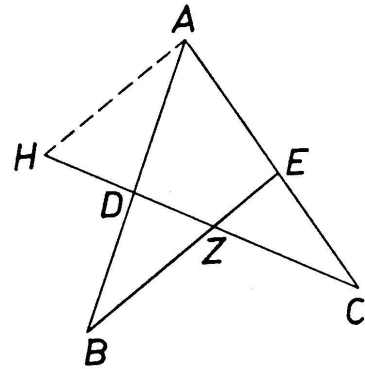


Fig.4

### 3. Satz (Fig. 5).

Wenn auf einem Kreise ein Bogen ABC gegeben ist und die beiden Bögen AB, BC kleiner sind als ein Halbkreis, wenn ferner der Schnittpunkt des Radius DB mit der Sehne AC E genannt wird, so verhält sich die Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AB}$  gehört, zu der Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{BC}$  gehört, wie AE zu EC.

*Beweis:* Die erste der genannten Sehnen ist gleich  $2 \cdot AZ$ , wenn wir von A aus das Lot AZ auf den Radius DB fallen. Die zweite der genannten Sehnen ist gleich  $2 \cdot CH$ , wenn wir von C aus das Lot AZ auf den Radius DB fallen. Das Verhältnis der beiden genannten Sehnen ist also  $AZ : CH$ . Dieses Verhältnis ist aber nach dem Strahlensatz gleich dem Verhältnis  $AE : EC$ .

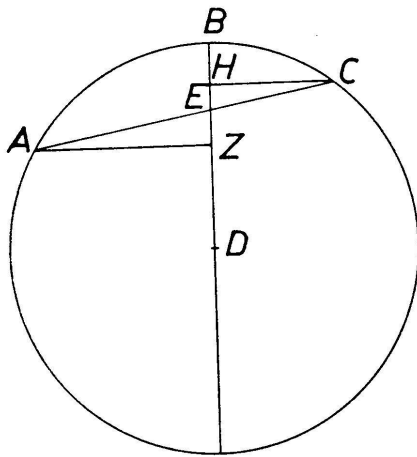


Fig.5

Wenn wir uns der Ptolemäischen Funktion bedienen, so heisst dieser dritte Satz

$$p(\widehat{AB}) : p(\widehat{BC}) = AE : EC :$$

### 4. Aufgabe (Fig. 6).

Es sei der Bogen  $\widehat{AC}$  eines Kreises gegeben. Er soll so in zwei Teile  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  geteilt werden, dass die zu den Teilbögen gehörigen Sehnen in einem gegebenen Verhältnis stehen.

*Lösung:* Angenommen, B wäre der gesuchte Teilpunkt, so schneidet der Radius DB die Sehne AC in E.

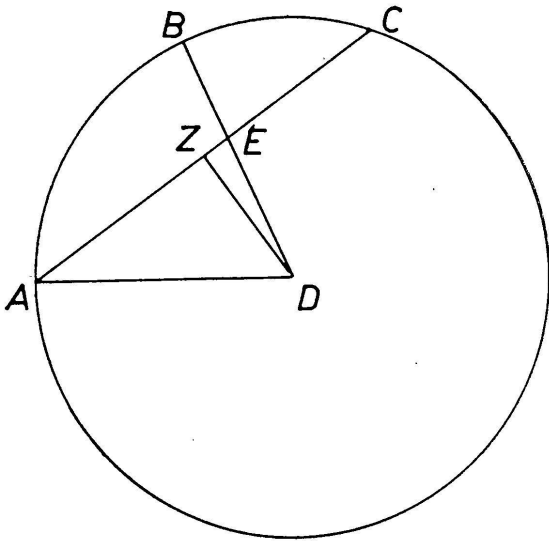


Fig. 6

Dann stehen nach dem vorigen Satze AE und EC zu einander im gleichen Verhältnis wie die zu den Teilbögen gehörigen Sehnen. Man hat also die Sehne AC nur in dem gegebenen Verhältnis zu teilen und den Teilpunkt E mit dem Mittelpunkt E zu verbinden. Diese Verbindungslinie schneidet den Kreis im gesuchten Punkt B.

*Anmerkung:* Wenn von D das Lot DZ auf AC gefällt wird, so ist die Grösse des Winkels EZD aus den gegebenen Grössen bestimmbar.

5. Satz (Fig. 7).

Auf einem Kreise seien 3 Punkte A, B, C gegeben, so dass die Bögen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{BC}$  kleiner als der Halbkreis sind. Der verlängerte Radius DA schneide CB in E. Dann verhält sich die Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AC}$  gehört, zu der Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AB}$  gehört, wie CE: BE.

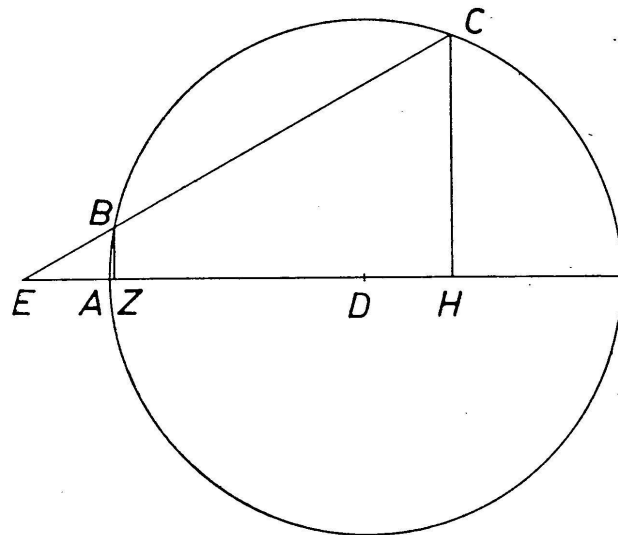


Fig. 7

*Beweis:* Wir fällen von B und C die Lote BZ und CH auf die Gerade EAD. Dann ist die Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AC}$  gehört, gleich  $2 \cdot CH$ , die Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AB}$  gehört, gleich  $2 \cdot BZ$ . Es ist aber

$$2 \cdot CH : 2 \cdot BZ = CE : BE \quad (\text{Strahlensatz}).$$

Es ist also

$$p(\widehat{AC}) : p(\widehat{AB}) = CE : BE . .$$

6. Aufgabe (Fig. 8).

Es sei der Bogen  $\widehat{CB}$  gegeben, ferner das Verhältnis der Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{CA}$  gehört, zu der Sehne, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{AB}$  gehört. Der Punkt A ist zu finden.

*Lösung:* Angenommen A sei der gesuchte Punkt, D der Mittelpunkt des Kreises, so schneide DA die Sehne CB in E. DZ sei das Lot, das von D auf BC gefällt ist. Dann stehen nach dem Satz 5 die genannten Sehnen im Verhältnis CE zu BE. Daher ist der Punkt E konstruierbar und somit auch die Grösse des Winkels EDB.

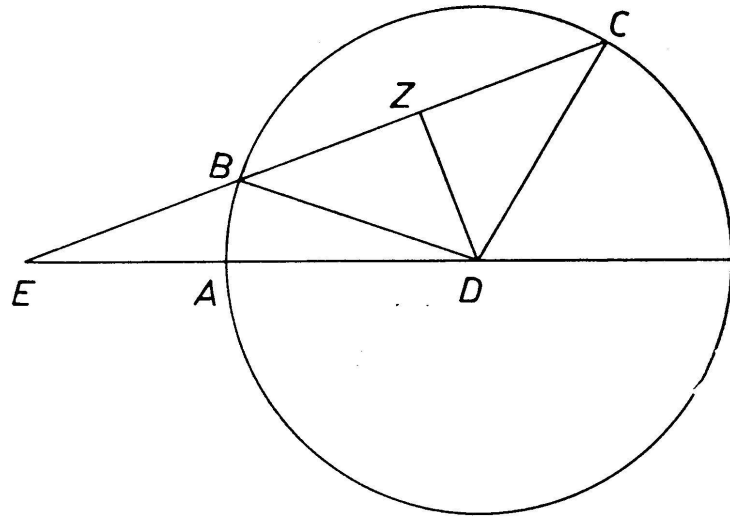


Fig. 8

7. Hauptsatz (Fig. 1 und Fig. 9).

Ist ABC ein sphärisches Dreieck und schneiden zwei sphärische Ecktransversalen CD und BE einander in Z, so ist

$$\frac{p(\widehat{CE})}{p(\widehat{EA})} = \frac{p(\widehat{CZ})}{p(\widehat{ZD})} \cdot \frac{p(\widehat{DB})}{p(\widehat{BA})},$$

wobei unter dem Zeichen  $p(\widehat{CE})$  die Sehne zu verstehen ist, die zum Bogen  $2 \cdot \widehat{CE}$  gehört.

*Beweis:* Das Zentrum der Kugel H werde mit den Punkten B, Z und E verbunden. Die Verlängerung von AD schneide

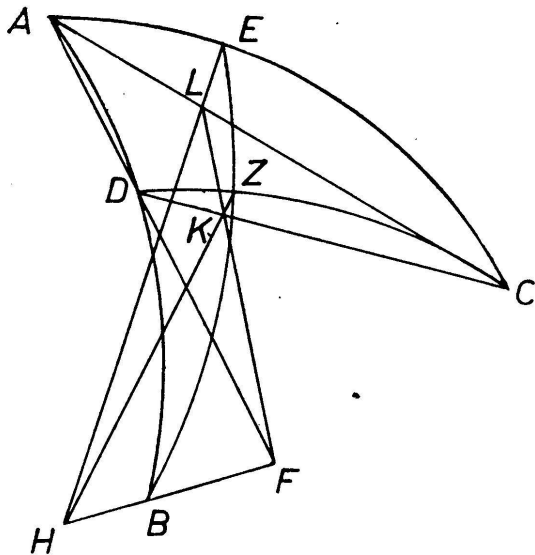


Fig. 9

die Verlängerung von HB in F. Die Gerade DA schneide HE in K, die Gerade HZ schneide HE in L. Die Punkte F, K, L liegen auf einer Geraden, da diese Punkte sowohl in der Ebene des Dreiecks ACD als auch in der des Kreises BZE liegen. Auf die ebene Figur der Punkte ADFKLC wenden wir den Satz 1 an und erhalten:

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD} \cdot \frac{DF}{FA}.$$

Nach dem Satze 3 ist aber

$$CL : LA = p(\widehat{CE}) : p(\widehat{EA})$$

$$CK : KD = p(\widehat{CZ}) : p(\widehat{ZD})$$

$$DF : FA = p(\widehat{DB}) : p(\widehat{BA})$$

Daher ist

$$\frac{p(\widehat{CE})}{p(\widehat{EA})} = \frac{p(\widehat{CZ})}{p(\widehat{ZD})} \cdot \frac{p(\widehat{DB})}{p(\widehat{BA})},$$

und somit ist der Hauptsatz bewiesen.

Zu diesem Hauptsatz ist nun folgendes zu bemerken: Schreiben wir ihn, indem wir die Funktionen  $p(\widehat{CE})$ ,  $p(\widehat{EA})$  u.s.f. durch die ihnen proportionalen Grössen  $\sin(\widehat{CE})$ ,  $\sin(\widehat{EA})$  u.s.f. ersetzen und die Nenner wegmultiplizieren, in der Form

$$\sin(CE) \cdot \sin(AB) \cdot \sin(DZ) = \sin(EA) \cdot \sin(BD) \cdot \sin(ZC),$$

so erkennt man leicht die Analogie zum Satze des Menelaos für die ebene Geometrie (Fig. 3). Dieser heisst bekanntlich: Wird ein Dreieck durch eine Transversale geschnitten, so sind die Produkte der alternierenden Seitenabschnitte einander gleich. Er ist identisch mit dem oben unter Nr. 2 angeführten Satz. Auch der sphärische Satz wird dem Mathematiker Menelaos zugeschrieben, der um 100 nach Chr. Geb. lebte. In späteren Zeiten wird der sphärische Satz auch als „regula sex quantitarum“ bezeichnet.

Nun ist noch die Frage zu beantworten, wie Ptolemäus mit Hilfe des sphärischen Menelaos-Satzes die Aufgaben bewältigt, die die sphärische Trigonometrie stellt. Wir wollen das an Hand der ersten Anwendung zeigen, die Ptolemäus macht. Es handelt

sich um folgende Frage: Welche Deklination hat ein gegebener Punkt der Ekliptik, wenn die Schiefe der Ekliptik — sie heisse hier  $\alpha$  — gegeben ist. In Figur 10 stellt der Bogen AC den

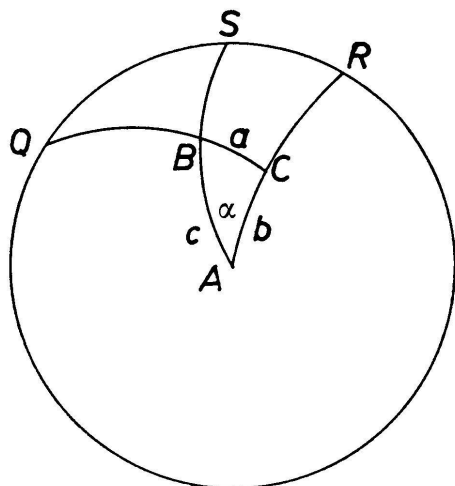


Fig.10

Aequator dar, der Bogen AB die Ekliptik. Der Bogen AB ist der Grösse nach gegeben. Nach der Deklination CB wird gefragt. Befreien wir die Aufgabe von ihrer astronomischen Einkleidung, so heisst sie: In dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Seite  $\widehat{AB}$  und der Winkel BAC gegeben; die Seite  $\widehat{BC}$  ist zu berechnen.

Ptolemäus verlängert die Seiten AB, AC und CB bis zu dem Hauptkreise, dessen Pol A ist (QC und QR sind also Meridiane). Die Schnittpunkte sind S, R und Q. Wenn nun der Satz des Menelaos auf das Dreieck QBS angewandt wird, so entsteht die Gleichung

$$\sin (BA) \cdot \sin (SR) \cdot \sin (QC) = \sin (AS) \cdot \sin (RQ) \cdot \sin (CB) .$$

Es ist aber

$$BA = c, \quad SR = \alpha, \quad QC = 90^\circ, \quad AS = 90^\circ, \quad RQ = 90^\circ, \quad CB = a ,$$

daher

$$\sin c \cdot \sin \alpha = \sin a .$$

Somit ist  $a$  durch  $c$  und  $\alpha$  bestimmt. Die zuletzt gewonnene Formel ist eine der Neperschen Analogien. Auch die anderen Neperschen Analogien lassen sich aus der Figur 9 gewinnen, und Ptolemäus leitet sie tatsächlich aus der Figur ab. Legt man nämlich das Dreieck ASR zugrunde, so ergibt sich

$$\sin \widehat{AB} \cdot \sin SQ \cdot \sin RC = \sin BS \cdot \sin QR \cdot \sin CA$$

oder

$$\sin c \cdot \cos \alpha \cdot \cos b = \cos c \cdot \sin b$$

oder

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha .$$



Geht man drittens vom Dreieck ABC aus, so ergibt sich

$$\sin AR \cdot \sin CQ \cdot \sin BS = \sin RC \cdot \sin QB \cdot \sin SA$$

oder

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a .$$

Geht man endlich vom Dreieck QCR aus, so folgt

$$\sin QB \cdot \sin CA \cdot \sin RS = \sin BC \cdot \sin AR \cdot \sin SQ$$

oder

$$\cos a \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \cos \alpha$$

oder

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin b .$$

Ptolemäus rechnet also eigentlich nur mit rechtwinkligen Dreiecken. Andere Dreiecke werden in rechtwinklige Dreiecke zerlegt oder auf rechtwinklige Dreiecke zurückgeführt.

---