Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HENRI LEBESGUE LE SAVANT, LE PROFESSEUR, L'HOMME
Autor: Denjoy, Arnaud / Felix, Lucienne / Montel, PauL
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33732

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

HENRI LEBESGUE

LE SAVANT, LE PROFESSEUR, L'HOMME

PAR

Arnaud DENJOY, Lucienne FELIX, Paul MONTEL, Paris

Le savant

Aujourd'hui, dans toutes les universités du monde, la mesure des ensembles dans un espace quelconque, avec les conditions fondamentales qu'elle doit remplir et l'arbitraire qu'elle admet, puis, cette mesure étant acquise, l'intégrale d'une fonction de point, élément de cet espace, ces deux doctrines liées sont enseignées à l'étudiant et apprises par lui sans offrir ni au maître ni au disciple l'apparence de la moindre difficulté. Or ces clartés, dans leurs feux complémentaires, ont jailli du cerveau de Lebesgue. Borel avait résolu le problème de la mesure euclidienne des ensembles linéaires, c'est-à-dire portés par une droite. Il avait introduit, avec d'autres principes, le plus important de tous, à savoir l'additivité complète de la mesure: quand un ensemble est formé par la réunion d'une infinité dénombrable (c'est-à-dire pas plus abondante que celle des entiers naturels) d'ensembles mesurables disjoints, cet ensemble total est mesurable et sa mesure est la somme de la série formée par les mesures des constituants. La métrique borélienne, d'ailleurs immédiatement extensible à des espaces de toute nature ou à des évaluations non euclidiennes dans les espaces cartésiens, cette magnifique conception offrait l'intérêt de donner le mot d'une énigme vainement posée à Cantor, Jordan, Minkowski et bien d'autres. Mais, sans l'application de la mesure linéaire à l'intégration des fonctions d'une variable, l'Analyse n'avait que peu de secours à attendre de la découverte de Borel.

Jusqu'à la thèse de doctorat où Lebesgue, en 1902, publia sa définition de l'intégrale, on ne disposait, pour effectuer cette opération sur les fonctions définies dans un intervalle, que de la méthode de Riemann. Seuls quelques types de fonctions discontinues, principalement les fonctions à variation bornée, étaient intégrables de cette manière. Les primitives de certaines dérivées bornées de nature très simple ne pouvaient s'obtenir par ce calcul. Les formules de Fourier, donnant les coefficients d'une série trigonométrique partout convergente dont la somme est une fonction connue, ces formules consistant en intégrales dont le coefficient est proportionnel à cette fonction-somme, n'avaient, elles non plus, pas de sens, même dans des cas assez élémentaires où cette somme est bornée.

Cette définition de l'intégrale, publiée par Riemann, précisée par Darboux, est d'un profond intérêt. C'est une très belle construction logique. Mais elle offrait à l'Analyse un instrument de bien faible puissance. Les théorèmes généraux sur l'intégration des suites convergentes n'étaient démontrés que sous des conditions très restrictives, limitant exagérément leur champ d'application. Les problèmes fondamentaux, nous en avons donné plus haut deux exemples, dont le progrès était arrêté par l'insuffisance de l'outil d'intégration, étaient nombreux. Leur solution n'était obtenue que dans des cas particuliers, pour des données continues ou affectées de discontinuités très simples. A la façon des eaux retenues par un éboulis de montagnes obstruant un défilé, les questions d'énoncé général, demeurées en suspens, s'accumulaient devant cette barrière de l'intégrale déficiente. Et de même que, sous la pesée liquide, l'obstacle ayant cédé, le lac constitué en amont se vide promptement, pareillement au fur et à mesure que l'intégrale de Lebesgue fut appliquée aux problèmes jusqu'alors résolus pour les seuls arguments continus, et par l'intégrale de Riemann, la légitimité des résultats antérieurement acquis se manifesta chaque fois que la nouvelle intégrale se substituait à l'ancienne. Et le champ de validité des résultats s'accrut démesurément dans une foule de sujets.

On a trouvé bien des images pour faire saisir la différence séparant les deux conceptions. Soit, par exemple, à calculer la hauteur moyenne d'une rivière au-dessus d'un étiage, sur la

période d'une année (non bissextile), quand la hauteur quotidienne, mesurée en centimètres, est notée. Avec Riemann, à toute fraction d'année constituée par une journée particulière, soit 1/365, on appliquera un facteur, constituant le poids attribué à cette fraction, et ce poids sera la hauteur des eaux ce jour-là. On ajoutera les trois cent soixante-cinq produits. Avec Lebesgue, on collationnera les diverses hauteurs distinctes observées entre la plus basse et la plus élevée. A chacune de ces hauteurs on appliquera un facteur-poids qui sera la fraction d'année (nombre de jours divisé par 365) où le niveau s'est inscrit à cette hauteur. On ajoute les résultats.

Des deux façons on a obtenu la hauteur moyenne cherchée, mais celle de Lebesgue offre une immense possibilité d'extension. Il divise en parcelles le champ décrit par les diverses valeurs de la fonction, celle-ci étant un nombre. Il pose le principe que si la fonction est comprise entre A et B sur un ensemble de mesure m, sur ce même ensemble la fonction contribuera à l'intégrale pour une quantité comprise entre mA et mB. Cet énoncé, entendu par Lebesgue pour les fonctions d'une variable réelle et la mesure euclidienne des ensembles linéaires, peut être adopté pour les fonctions définies aux points d'un espace quelconque, et pour toute métrique des ensembles dans cet espace.

* * *

Lebesgue introduisit l'espèce des fonctions *mesurables*. Le progrès était immense. Car le passage à la limite, limite exacte, plus grande limite, plus petite limite, d'une suite de fonctions mesurables donne encore une fonction mesurable. Auparavant, le passage à la limite détruisait la nature de la fonction variable. Une suite convergente de fonctions continues n'est pas habituellement une fonction continue. C'est une fonction de classe 1, selon Baire. La limite d'une suite convergente de fonctions de classe 1 n'est pas normalement une fonction de classe 1, etc. Mais la limite d'une suite convergente de fonctions mesurables est mesurable. Dès lors, toutes les fonctions rencontrées dans les problèmes de l'Analyse sont mesurables. Que d'énoncés jadis encombrés d'hypothèses pour définir des cas où l'intégration

terme à terme d'une série convergente de nature donnée était légitime ! Or, si les fonctions sont bornées, leurs intégrales de Lebesgue tendent vers l'intégrale de la fonction limite. La généralité de ces résultats fit la révolution dans les méthodes de l'Analyse.

Jusqu'à Lebesgue, celle-ci se bornait sensiblement à l'étude des fonctions continues. Désormais, son champ sera formé des fonctions sommables, c'est-à-dire dont la valeur absolue est intégrable au sens de Lebesgue.

* * *

Mais celui-ci découvre un phénomène nouveau, celui du « presque partout », c'est-à-dire des propriétés vraies partout, sauf sur un ensemble de mesure nulle. D'un argument synthétique F, un argument f dérive-t-il par une opération D et, connaissant f, F est-il le résultat d'une opération intégrale I inversant D, tout au moins quand f est sommable ? Dès lors, toute fonction f_1 pour laquelle l'opération I peut s'effectuer aura pour résultat un argument F_1 dont f_1 dérivera « presque partout » par D, comme f dérivait de F. Toutefois, si ce lien réciproque n'est pas exactement réalisé par l'opération D appliquée à F_1, ce sera par une opération D_1 plus générale que D et telle que l'opération I soit l'inverse de D_1 (et non pas seulement de D).

Ainsi une dérivée ordinaire f est-elle sommable ? Sa primitive $F(x)$ sera égale à son intégrale de Lebesgue entre a et x. Et inversement, toute fonction sommable f_1 intégrée entre a et x donne une fonction F_1 dont f_1 est la dérivée « presque partout ».

La somme f d'une série trigonométrique convergente est-elle une fonction sommable ? Les coefficients s'en obtiennent par les formules de Fourier où les intégrales sont prises au sens de Lebesgue. (Celui-ci l'avait établi simplement pour les fonctions développables bornées; de La Vallée Poussin l'a démontré pour les fonctions sommables quelconques). Et inversement, si f est sommable et si les formules de Fourier sont appliquées à cette fonction avec l'intégration de Lebesgue, on forme une série trigonométrique dont la somme est f « presque partout », à la

condition d'effectuer au besoin une sommation généralisée de la série, par la méthode de Riemann, ou par celle de Poisson.

L'expression « presque partout » n'a pas eu mon approbation. J'en ai proposé une autre: « sur une plénitude » (et auparavant: « sur une épaisseur pleine »). Connaître une fonction « presque partout » n'avance pas plus que de ne la connaître « presque nulle part » si l'on ne s'est pas assuré, par les propriétés spéciales, généralement topologiques ou « descriptives » de cette fonction, qu'il est indifférent pour le but à atteindre d'ignorer ses valeurs sur un ensemble de mesure nulle. Du point de vue topologique, c'est-à-dire pour les caractères invariants par une transformation topologique [$y = f(x)$ continue et croissante, dans le cas d'une variable], un ensemble de mesure nulle peut être un « presque partout », son complémentaire, pleine épaisseur métrique, étant topologiquement un « presque nulle part ».

* * *

Lebesgue et Borel s'opposèrent dans une violente polémique. Le premier voulait refuser à Borel la découverte de la mesure et, peut-être sous cette inspiration, il présenta la mesure comme une conséquence de l'intégrale. Mais Borel, semblant douter de ses titres de priorité incontestables pour la définition de la mesure, et laissant dédaigneusement à Lebesgue cette découverte, voulut par ailleurs contester la valeur de la nouvelle intégrale. Il prétendait obtenir celle-ci sans utiliser la mesure, en substituant à la fonction-argument f une suite de polynômes intégrée terme à terme et fournissant à la limite l'intégrale de Lebesgue. Mais le recours à ces polynômes est un artifice dénué de tout intérêt. En fait, Borel pouvait dire:

« 1° J'ai appris à mesurer les familles d'intervalles disjoints (ensembles ouverts), les ensembles fermés, les ensembles de mesure nulle, les ensembles limites de suites croissantes ou décroissantes d'ensembles mesurables. Toutes les idées intervenant dans la théorie de la mesure m'appartiennent. Peut-être Lebesgue leur a-t-il ajouté un peu de mise en ordre.

» 2° Si l'on étend, ce qui n'offre aucune difficulté, aux ensembles plans ma définition de la mesure linéaire, et si f est

une fonction positive donnée sur l'intervalle ab, l'aire, à mon sens, de l'ensemble $[0 < y < f(x),\ a < x < b]$ est l'intégrale de Lebesgue $\int_a^b f(x)\,dx$. J'admire d'autant plus l'intégrale de Lebesgue que je peux la revendiquer comme mienne. »

Est-ce pour déprécier la mesure que Lebesgue entendit la déduire de l'intégrale ? Ainsi donc, selon lui, le segment de l'axe réel compris entre a et b aurait pour longueur $b - a$ parce que $b - a$ est l'aire du rectangle de hauteur 1 ayant ce segment pour base. Mais cette aire n'aurait-elle pas cette valeur $b - a$ parce que tel est le volume du parallélépipède de hauteur 1 construit sur ce rectangle pris pour base, etc. ? Et cependant F. Riesz pourrait avoir donné corps à cette intuition de Lebesgue. Une fonctionnelle linéaire d'une fonction-argument f (ici l'intégrale de f sommable, sur un ensemble mesurable) est l'intégrale de Lebesgue de f quand on adopte pour mesure d'un ensemble e la valeur de la fonctionnelle pour $f = 1$ sur e et $f = 0$ hors de e. Mais F. Riesz suppose l'intégrale fondée sur le procédé de Lebesgue. Aussi, dans la définition de l'intégrale, ne pas prendre pour départ la mesure euclidienne des ensembles et vouloir tirer celle-ci de l'intégrale posée *a priori*, ce procédé adopté par Lebesgue est artificiel et bien discutable.

Borel et Lebesgue semblent tous deux avoir suspecté la solidité de leurs titres à revendiquer la découverte de la mesure euclidienne des ensembles linéaires. Dans leurs définitions de l'intégrale, chacun a voulu déprécier le rôle de la mesure: Borel en l'ignorant, Lebesgue en la faisant apparaître accessoirement comme un exemple d'intégrale.

Lebesgue a codifié les principes de la mesure des ensembles linéaires, principes déjà mis en œuvre par Borel. Celui-ci n'avait pas conçu que certains ensembles pussent être non mesurables. Lebesgue réserva une place à ceux-ci. On doit remarquer que les notions de grande généralité créées par Borel, Baire, Lebesgue, se rapportaient uniquement aux ensembles linéaires et aux fonctions d'une variable réelle.

L'équité commande d'attribuer la mesure à Borel et l'intégrale à Lebesgue. Au surplus, Borel n'a jamais tiré parti d'une intégrale différente de celle de Riemann. Et même il n'a eu à

intégrer que des fonctions continues ou ayant une singularité isolée.

* * *

Si l'intégrale et tout ce que son auteur en a tiré constitue le titre capital et impérissable de Lebesgue, on ne doit pas oublier son intervention dans bien des sujets, et toujours pour apporter des vues originales d'un profond intérêt.

Les séries trigonométriques avec les critères de convergence, la question de la non-uniformité de cette convergence pour certaines fonctions continues, le problème de Dirichlet, avec la rectification du raisonnement de Riemann pour le plan et les singularités offertes par les pointes dans le cas de l'espace; la définition de l'aire des surfaces, dans leur idée première les cribles de Lusin pour la définition des ensembles analytiques, les propriétés générales des intégrales singulières, la topologie cartésienne des variétés enlacées, l'invariance (rattachée à un remarquable principe) du nombre des dimensions dans les transformations topologiques, sur tous ces sujets, Lebesgue a jeté des idées neuves et profondes, dont le développement ultérieur des théories s'est largement inspiré.

Le seul risque à courir pour la mémoire de Lebesgue serait que, l'Analyse moderne ayant tellement identifié ses propres principes aux idées créées par lui, celles-ci ayant tellement proliféré, essaimé dans tant de directions variées, les nouvelles écoles vinssent à oublier de quel tronc initial ces immenses rameaux sont issus. Le vacarme des renommées éphémères pourra parfois étouffer le bruit de son renom. Mais la postérité saura rendre à chacun son dû et l'histoire des mathématiques fixera l'un de ses tournants dans l'apparition de l'intégrale de Lebesgue en la seconde année de ce siècle.

Le professeur

Henri Lebesgue, qui enseigna depuis sa sortie de l'Ecole normale supérieure, d'abord au Lycée de Nancy, puis dans les Facultés de Rennes, Poitiers, Paris, puis au Collège de France et dans les deux Ecoles normales supérieures (rue d'Ulm et

Sèvres), fut un très grand professeur. Peut-être n'aurait-il pas accepté cet éloge sans restrictions: Tout dépend, en effet, de ce qu'on entend par là !

A l'Ecole de Sèvres, au temps où j'y étais étudiante, Lebesgue professait en deuxième et troisième années, et Emile Picard en première année. Avec Picard, maître prestigieux, tout était clair; les idées essentielles apparaissaient dans une lumineuse simplicité et le calcul donnait les résultats désirés comme un serviteur bien stylé, sans effort apparent. Les voies les plus aisées, savamment choisies et déblayées conduisaient aux sommets d'où l'horizon se dégage: « Effet d'éblouissement » me disait Lebesgue lorsque nous en parlions quelques années plus tard. Mais il disait aux élèves avec justice: « Il y a tout dans votre cours Picard » et, en effet, cette initiation, quoique sommaire, permettait de poursuivre l'étude mathématique dans toutes les directions.

Un autre maître était un très grand professeur: Paul Langevin: des idées les plus profondes aux détails d'application, tout était en place. Les calculs faits de tête par des procédés subtils, un tableau si bien organisé que le chiffon, effaçant l'accessoire, laissait apparaître en un schéma saisissant la structure du cours, un enchaînement d'idées sans défaillance, tout cela sans notes par un prodigieux pouvoir d'attention, tel était le cours Langevin, si souvent rédigé par ses auditeurs, jamais publié par un souci de plus en plus exigeant du maître. Henri Lebesgue était toujours heureux d'entendre faire l'éloge de Langevin et c'est pourquoi je me permets ici d'en fixer le souvenir. Les mathématiques se prêteraient-elles autant que la théorie de l'électricité à un tel traitement ? Non sans doute. En tout cas le cours Lebesgue n'offrait rien de semblable.

Lebesgue a exprimé nettement son point de vue: « Le seul enseignement que peut, à mon avis, donner un professeur, c'est de *penser devant ses élèves.* » Et, pour que cette pensée reste vivante et spontanée malgré la suite des années d'enseignement sur des programmes immuables ou presque, deux conditions: enrichir toujours sa propre culture et oublier la mise au point de l'année précédente que l'on pourrait réciter, oublier ce qui a été rodé par les pédagogues pendant des siècles et copié dans

tous les manuels, oublier les phrases toutes faites qui remplacent la pensée: c'est en ce sens que Lebesgue prétendait s'être toujours refusé à « savoir » les mathématiques.

L'idéal n'est donc pas de si bien choisir les méthodes, de si bien doser les difficultés, qu'un enchaînement de lemmes, de théorèmes, de corollaires se déroule comme les marches d'un escalier avec une rampe de chaque côté: « Faisons ceci et encore ceci, remarquons cela et encore cela; et après tout ce disparate, C.Q.F.D. » Tout le monde est capable de suivre ce chemin avec un peu de persévérance, même les yeux fermés. « C'est mettre les mathématiques en pilules ! » disait Lebesgue.

Même en évitant ces défauts, il n'est pas suffisant d'atteindre, grâce à une préparation minutieuse, un exposé parfait mais figé que l'on retrouve dans un livre; le professeur n'aurait alors d'autre rôle que d'indiquer comment et avec quel rythme il faut lire. Non. Lebesgue conseillait formellement: « Les grandes lignes d'un cours doivent certes être arrêtées d'avance, mais il faut, je crois, que les détails soient improvisés. » D'où la méthode à suivre: se placer franchement face à face avec le problème, prendre conscience de sa nature, de sa structure, percevoir le terrain inconnu à explorer pour atteindre le but, imaginer des voies à essayer, des relais à poser, des outils utilisables, trouver coûte que coûte un passage sans se laisser rebuter par un manque d'élégance ou par le disparate des détails; puis, comprendre ce qu'on a fait, le critiquer dans son esprit plus que dans sa forme, l'améliorer et arriver finalement à ce qui est simple, beau, pur au point de vue structure, adapté au niveau et au point de vue désirable, c'est-à-dire atteindre ce qu'on nomme souvent avec quelque naïveté « une méthode naturelle ». Et même alors, ne pas se contenter de cette belle solution, mais chercher pourquoi elle réussit, ce qu'elle atteint réellement, comment elle révèle des relations entre les êtres mathématiques.

Dans la recherche, donc, toutes les barrières artificielles séparant les différentes branches des mathématiques disparaissent, les frontières entre géométrie plane et géométrie dans l'espace, entre géométrie synthétique ou analytique, entre mathématiques élémentaires ou supérieures, méthodes anciennes ou modernes s'effacent et la science est perçue dans son unité. Tout problème

est alors susceptible de multiples solutions suivant l'aspect où on l'étudie. Parfois l'un d'eux semble le meilleur: nous croyons entendre encore le maître dire « en réalité il s'agit de... », mais ce n'est qu'une prééminence d'un instant, relative à l'éclairage actuel de la question: « Il m'est arrivé comme à tout le monde d'avoir l'impression que je venais de comprendre comme il fallait comprendre, qu'autrement on ne comprenait pas complètement. On sent tout le relatif de cet absolu dès qu'on a l'occasion de réfléchir plusieurs fois à une même question difficile à quelque temps d'intervalle. Chaque fois on finit par comprendre et chaque fois d'une façon différente. Puisqu'il n'y a pas une meilleure manière de comprendre, il ne saurait y avoir une meilleure manière d'enseigner. »

Le but est donc atteint si, en ce jour, en cet instant, l'accord des auditeurs est obtenu, s'ils sont, non seulement convaincus par voie logique, mais encore éclairés par une sensation que nous connaissons bien: celle de comprendre. « Si les rouages d'une démonstration sont démontés pièce à pièce (...) les élèves n'auront rien à objecter mais ils ne seront pas pour cela parvenus à cette conviction intime qui exigerait que l'on ait compris assez pour que les vérités nouvelles se raccordent, s'enchaînent, et de plusieurs façons, avec celles qui sont déjà familières. » En somme, qu'est-ce que comprendre ? « Une notion n'a toute son utilité qu'au moment où on l'a assez bien comprise pour croire qu'on l'a toujours possédée et pour être devenu incapable d'y voir autre chose qu'une remarque banale et immédiate. »

Si l'effort de recherche n'a pas été dissimulé, on ne sera pas dupe de cette illusion de simplicité et nul ne s'étonnera que le simple soit ce que l'on aperçoit en dernier: « Aux exposés qui présentent la découverte comme une création divine où la raison humaine n'intervient que pour constater avec émerveillement ce qu'ont voulu les dieux, ne substituons pas des exposés qui feraient de la découverte l'aboutissement d'opérations syllogistiques s'imposant avec nécessité et évidence. »

Si l'essentiel est ainsi, non d'exposer le contenu d'une science achevée, préalablement existente dans l'esprit du professeur, mais d'en faire vivre la création et d'en faire comprendre la structure, on est conduit à faire appel souvent à l'*histoire des*

sciences. Il ne s'agit pas de faire passer l'enfant ou l'étudiant par les stades historiques que le spécialiste de l'histoire a lui-même tant de mal à imaginer, sans profiter de la lumière projetée maintenant sur tant de domaines obscurs et de l'ordre qui remplace le chaos, d'oublier que l'élève baigne dans la vie moderne et n'est pas un primitif. Un exemple ? « La notation décimale n'est pas un héritage des Grecs; cela suffit pour que tout ce qui a trait à cette notion soit plaqué sur l'enseignement grec et non incorporé à lui. Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences: l'invention de la numération décimale. »

Lebesgue se défendait de faire de l'histoire des sciences le but de ses recherches: « Je ne fais pas de l'histoire des sciences ! Je fais de la Science. » Seulement l'état de la science actuelle et ses tendances sont expliqués et justifiés par son passé. L'histoire sert avant tout à montrer comment le problème se pose: « Au-delà de leur intérêt historique, l'intérêt mathématique (de ces études) est de permettre de reconnaître l'étroite parenté qui unit des recherches effectuées à plus de vingt siècles de distance. » Tout le livre des *Constructions géométriques* est bâti sur cette idée.

Les faits historiques sont peu certains et le nom propre qui sert d'étiquette aux théorèmes n'est que rarement justifié, mais qu'importe ? « Autant s'en tenir aux inexactitudes consacrées ! » Mais ce qui compte, c'est l'histoire des idées. Encore faut-il s'entendre: « L'histoire des idées qui ont conduit à une découverte n'est en réalité que l'exposé des raisons logiques, imaginées après coup, de la réussite de celles des idées qui ont été fécondes. Donc ne pas se méprendre sur la valeur d'une histoire des idées ni, pour cela, nier cette valeur. D'une part, elle fait bien comprendre les méthodes et leur portée exacte, d'autre part et surtout, le travail critique que suppose une telle histoire est exactement celui que notre esprit, ou si l'on veut notre subconscient, doit constamment faire pour choisir, dans le tourbillon des idées, celles qui paraissent pouvoir être utilisées et amener celles-ci et toutes celles-ci jusqu'à la conscience. »

On sent bien que dans ces lignes il parle en mathématicien créateur, qu'il ne dissocie pas du professeur. C'est pour lui-même

qu'il rattache le présent au passé, qu'il consacre des pages de ses ouvrages à exposer les recherches antérieures, c'est « pour se rassurer lui-même » et « montrer que ses idées personnelles sont en liaison étroite avec celles de ses devanciers ».

Pour comprendre Lebesgue professeur, on est ainsi conduit à le comprendre comme savant, à voir sa position devant la science.

Sa méthode d'exposition, de recherche devant les élèves, est la conséquence de sa conception de savant: « Le mathématicien doit explorer le domaine où il travaille, observer le rôle des êtres mathématiques qu'il y rencontre, les regarder vivre, pourrait-on dire, afin d'en discerner les qualités et de reconnaître les apports de chacune de ces qualités. » Et aussi: « Ce que j'ai obtenu en mathématiques a été le résultat naturel et parfois immédiat de l'examen des raisons de tel succès ou de l'impuissance de telle ou telle idée. »

Pour conclure, si l'on devait résumer l'attitude d'Henri Lebesgue professeur, je crois que c'est le mot *sincérité* qu'il faudrait prononcer. Il avait horreur de l'hypocrisie par laquelle on sauve la valeur d'un raisonnement au moyen d'un mot, d'une restriction, d'une incidente que l'on sait être hors de la portée de l'élève et que l'on prononce pour soi seul. Si le professeur est à la hauteur de sa tâche, il possède une lumière qu'il doit transmettre. Surtout pour les jeunes élèves, la perfection de la forme doit être l'aboutissement d'un effort collectif et la préparation doit avant tout porter sur le fond. C'est à cette tâche que notre maître, dans les deux Ecoles normales, essayait de préparer les futurs professeurs: « Je voudrais que les théorèmes ne soient pour aucun d'eux des arbres plantés à la queue leu leu le long de la route du programme, une route qui ne traverserait rien. Je voudrais qu'ils voient en eux les cimes dominantes d'une forêt touffue et variée, qu'ils sachent cette forêt sillonnée de mille sentiers permettant tout aussi bien de l'explorer, qu'ils se soient aventurés dans quelques-uns d'entre eux, admirant les plus beaux arbres sous tous leurs aspects. Pour être guide dans la forêt, ne faut-il pas bien la connaître et en sentir pleinement la beauté ? »

Pour être ce guide, nul n'était plus qualifié que Lebesgue. Certes l'improvisation n'est pas toujours sans dangers; parfois,

la fatigue aidant, quelque faute non corrigée à temps dans un calcul avait des conséquences désastreuses ! Le cours était difficile à apprendre, à rédiger, et ne remplaçait pas les livres, mais il apportait une lumière qu'aucun livre ne peut donner. Avec une patience sans limite et un intérêt inlassable, il s'adaptait à son auditoire, reprenant et variant les démonstrations jusqu'à ce qu'elles soient, non seulement acceptées, mais *senties*.

Et là nous touchons à l'essentiel, un point que j'ose à peine indiquer ici: avec le mot *sincérité*, il faut, et plus encore, écrire *bonté*. Si le savant ne peut se dissocier du professeur, moins encore celui-ci peut-il être dissocié de l'homme sensible et généreux, de l'ami paternel qui prenait part à toutes les peines que le destin inflige aveuglément à tant d'innocents. Plus la victime était jeune et vulnérable, plus il se penchait vers elle et, en secret, faisait le geste de justice ou de bonté qui soulageait. Nul ne saura jamais au juste tout le bien qu'il a pu faire ainsi et que l'intéressé ignorait souvent. Pourtant notre maître, M. Lebesgue, qui a beaucoup aimé ses élèves, en particulier celles de l'Ecole de Sèvres, a su qu'en retour il en était aimé.

L'homme

Un demi-siècle d'une amitié étroite et profonde, une communauté constante de pensées et souvent de sentiments m'ont permis de prendre la mesure de la grandeur de Henri Lebesgue.

Nous nous sommes connus et liés à l'Ecole normale supérieure à la fin du siècle dernier. Tout de suite, sa profonde originalité, sa rare pénétration, son esprit critique inexorable, son inébranlable logique se manifestèrent aux yeux de ses camarades.

Les certificats de licence n'existaient pas encore: nous étions assujettis à une série d'examens qui, au bout de deux ans, nous conféraient les licences nécessaires. En premier lieu, nous suivions des cours d'analyse. On nous apprit que toute surface développable est applicable sur le plan et que, réciproquement, toute surface qui peut être appliquée sur le plan est une surface développable. Et Lebesgue venait vers nous, tenant dans sa main un mouchoir froissé. « Est-il applicable sur le plan ? » demandait-il. Et, sur notre réponse affirmative: « Ce mouchoir

chiffonné est donc une surface développable.» Son esprit critique avait discerné que le théorème que l'on nous enseignait reposait sur des hypothèses de continuité des fonctions et des dérivées indispensables à son exactitude, mais qui ne sont pas toujours bien explicitées. Lebesgue se mit alors à chercher les surfaces non développables qui sont applicables sur le plan et fut amené pour les définir à découvrir l'intégrale qui porte son nom. Cette découverte, comme beaucoup d'autres qu'on lui doit, a ainsi une origine géométrique. Lebesgue a beaucoup aimé la géométrie et singulièrement la géométrie élémentaire à laquelle il s'est intéressé jusqu'à ses derniers jours.

Très méditatif, il lisait peu et, en présence d'un mémoire, il cherchait la marche générale de la pensée et, l'ayant reconnue, il rétablissait les démonstrations ou en imaginait de nouvelles.

Mais nous avions aussi à nous occuper de chimie, ce qui ne séduisait guère Lebesgue. Lorsque, après un hiver très dur, apparut ce printemps parisien dont le charme est si prenant, nous partîmes à la découverte de Paris et les heures du cours de chimie organique se passaient souvent à la proue de Lutèce, dans le petit jardin qui est au pied du Pont-Neuf. Lebesgue échoua en juillet à l'examen de chimie. Il fallait réparer ce désastre à la session d'octobre sous peine de sanctions sévères allant jusqu'à l'expulsion de l'Ecole. Lebesgue abrégea ses vacances pour rentrer à la rue d'Ulm et se mettre au travail sous la direction de notre camarade Langevin. Quand la date de l'examen fut arrivée, Langevin lui dit: « Tu es complètement nul, mais tu as peut-être une chance de t'en tirer. L'examinateur a l'oreille très dure; tu peux parler sans crainte, mais, si tu as le malheur d'écrire au tableau une seule formule chimique, tu es perdu. » Le conseil fut suivi à la lettre. A l'examen, Lebesgue parla d'abondance, face à l'examinateur et loin du tableau noir. « Ecrivez », dit celui-ci. Lebesgue, continuant à parler, se dirigeait alors lentement vers le tableau, prenait un morceau de craie, levait le bras et soudain, comme frappé par une idée subite, il revenait devant l'examinateur. « Ecrivez », répétait celui-ci. La scène se renouvelait et Lebesgue réussit à n'écrire aucun symbole chimique: il fut reçu.

Il n'avait guère été plus assidu au cours de cosmographie

que nous enseignait Wolff. Cependant, à l'examen écrit, sa copie, qui comportait un calcul astronomique, obtint une note magnifique. A l'oral, le professeur, ravi, se tourna gracieusement vers un de nos camarades qui avait scrupuleusement suivi toutes ses leçons et appela: « Monsieur Lebesgue. » Il fut très surpris de voir apparaître un visage inconnu.

Après son agrégation, Lebesgue prépara un doctorat pour lequel il présenta cette thèse intitulée *Intégrale*, *Longueur*, *Aire*, qui apportait à la science mathématique un outil d'une extraordinaire puissance. Cette thèse fut suivie d'autres travaux où les notions fondamentales de l'analyse étaient passées au crible, les dérivées souvent absentes, les fonctions discontinues mises à l'honneur. C'était l'heure où les profondes recherches de Dini et de Baire avaient attiré les chercheurs dans ce domaine.

L'accueil des travaux de Lebesgue par les maîtres de l'époque fut assez réservé. Beaucoup redoutaient de voir s'instaurer une tératologie des fonctions. Darboux, qu'on aurait pu croire favorable, à cause de son mémoire de 1875 sur les fonctions discontinues, lui fut hostile. On prêtait à Boussinesq ce propos: « Mais une fonction a tout intérêt à avoir une dérivée! » Il parlait sans doute de l'intérêt de celui qui l'emploie. Seul, Picard défendit les recherches de Lebesgue et apprécia ses qualités.

Lebesgue expliquait la nature de son intégrale par une image plaisante et accessible à tous. « Je dois payer une certaine somme, disait-il; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale. »

Cette notion est assurément plus simple que la première, mais elle exige une certaine maturité d'esprit et quelque familiarité dans la connaissance des points où une fonction prend la même valeur. Un jour que de jeunes mathématiciens réunis chez moi discutaient sur l'opportunité d'enseigner dès le début

l'intégrale de Lebesgue, celui-ci arriva inopinément. On lui posa la question: « Par quelle intégrale doit-on commencer devant de jeunes étudiants ? — Par celle de Riemann, bien entendu » répliqua Lebesgue.

M. Denjoy a conté dans son article la polémique qui opposa Borel et Lebesgue au sujet des notions de mesure et d'intégrale par suite de leur difficulté à définir objectivement la part de chacun. Les deux hommes se combattaient mais ne pouvaient pas ne pas s'admirer et s'estimer mutuellement: chacun d'eux savait apprécier la valeur de l'autre. Un jour, Borel essaya d'établir un terrain de conciliation. « Sans doute, dit-il, j'ai des défauts. Mais qui n'en a pas ? Un tel en a-t-il? — Oui, répondit Lebesgue. — Et un autre tel ? — Assurément. — Alors vous aussi peut-être avez-vous des défauts ? — Je ne crois pas » répondit Lebesgue après un instant de réflexion. J'ai souri quand Borel m'a conté l'histoire puis, ayant cherché un défaut de Lebesgue, j'ai été fort embarrassé.

Cette intégrale a aussi donné lieu à une controverse d'ordre philologique. M. Denjoy avait, après Lebesgue, donné une puissance nouvelle et définitive à la notion d'intégrale par sa belle création de la totalisation. Dans ses travaux, il introduisit le qualificatif «besgien» pour désigner l'intégrale de Lebesgue qui devint l'intégrale «besgienne». Lebesgue, mécontent, lui écrivit une de ces longues lettres dont il était prodigue, humoristique, ironique et mordante. « Vous appelez mon intégrale besgienne, écrivait-il, que diriez-vous si j'appelais la vôtre joyeuse ? » « Vous voulez appeler mon intégrale joyeuse, répondit M. Denjoy, je vous en défie bien. »

Lesbesgue n'était pas de ces mathématiciens qui vivent continuellement dans l'abstrait, que la réalité surprend, à qui leurs distractions apportent au moins autant de célébrité que leurs travaux. Il avait les pieds sur terre, il était ouvert à toutes les manifestations de la vie pratique ou sentimentale. Sa bonté était inépuisable. Si l'un de ses élèves avait besoin d'une aide matérielle, intellectuelle ou morale, il s'empressait de venir efficacement à son secours.

Nous avions coutume de nous raccompagner mutuellement à nos domiciles et nos séparations étaient précédées d'allées et

venues fertiles en bavardages. Un soir, nous déambulions aux environs de sa porte. La nuit étant venue, je m'aperçus que nos oscillations avaient une amplitude de plus en plus réduite. Je lui en demandai la raison. Alors il me montra un trou dans le trottoir où un promeneur distrait pouvait risquer un accident et ajouta que c'était l'heure où sa femme devait rentrer à la maison.

Mais sa bonté n'excluait pas le goût de l'ironie mordante. A propos du théorème de Bertrand établissant que toute courbe algébrique admettant un diamètre rectiligne pour chaque direction est composée de coniques et dont j'avais établi une extension, je fus conduit à penser que, si l'on fixe le degré de la courbe, il doit exister une limite supérieure du nombre des diamètres rectilignes au-delà de laquelle la courbe est composée de coniques et lui proposai d'exprimer cette limite en fonction du degré. Il résolut la question et me remit un manuscrit à publier au *Bulletin de la Société mathématique de France* dont j'étais alors le secrétaire. Le mémoire fut égaré et il dut recommencer la rédaction. Je lus alors sur les épreuves de l'article: « Une première rédaction de ce travail ayant été perdue par les soins de M. Montel, j'ai dû en composer une seconde. »

Lebesgue apportait autant d'énergie à défendre le juste qu'il en dépensait à soutenir le vrai. L'injustice le mettait hors de lui. Une élection en mathématiques à l'Académie des sciences lui parut constituer un déni de justice; il cessa pendant plusieurs années d'assister aux séances et ne reprit sa place que lorsque l'injustice lui parut réparée.

Au-dessus de tout, il plaçait le sentiment du devoir. Souffrant de la maladie qui devait l'emporter, il n'en continua pas moins à faire son cours au Collège de France. Paris, occupé par l'ennemi, était privé des moyens de transport ordinaires. Il frétait un de ces tricycles en forme de chaise à porteurs qui circulaient encore et se faisait conduire au lieu de son enseignement. Ce fut son dernier cours recueilli par Mlle Félix. Peu après, il dictait de son lit à son élève, Mlle Beauvallet, la substance d'un livre qu'il préparait sur les coniques. Après sa mort, j'ai pu publier deux ouvrages posthumes, l'un sur *Les constructions géométriques*, sujet de son dernier cours; l'autre sur *Les coniques*, grâce à ces

notes. On y retrouve ce goût persistant pour la géométrie élémentaire qui ne l'a jamais abandonné.

Il a été un grand savant, un professeur admirable, un homme d'une incomparable noblesse morale. Son influence sur le développement des mathématiques continuera longtemps à s'exercer par ses œuvres propres et par celles qu'il a inspirées.