

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE NUMBERS OF ZEROS AND OF CHANGES OF SIGN IN A SYMMETRIC RANDOM WALK  
**Autor:** Feller, William  
**Kapitel:** 7. Later returns to the origin.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33746>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$S_{2n-1}$ . For the expectations of these random variables we have

$$(6.1) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) = 2nu_{2n} - 1$$

and thus

$$(6.2) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (2n)^{1/2} \text{ as } n \rightarrow \infty .$$

(These formulas shows that the density of the zeros and of changes of sign decreases at a fast rate.)

*Proof.* Define new random variables by  $Y_j = 1$  if  $X_j = 0$ , and  $Y_j = 0$  if  $X_j \neq 0$ . Then

$$(6.3) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) = \sum_{j=1}^{2n-1} E (Y_j) = \sum_{r=1}^{n-1} u_{2r} .$$

and (6.1) follows by induction.

### 7. LATER RETURNS TO THE ORIGIN.

As a further application of the present elementary approach let us prove an important formula half of which has been proved by rather involved analytical methods <sup>4</sup>.

**THEOREM 5.** Let  $f_{k,2n}$  denote the probability that the  $k$ -th return to the origin takes place at the  $2n$ -th step (that is,  $f_{k,2n}$  is the probability that  $S_{2n} = 0$  and exactly  $r - 1$  among the  $S_j$  with  $1 \leq j < 2n$  vanish). Then

$$(7.1) \quad f_{k,2n} = z_{k,2n} - z_{k+1,2n} = \frac{2^k}{2^{2n}} \binom{2n-k}{n} \frac{k}{2n-k} .$$

*Proof.* It is clear that  $f_{1,2n} = f_{2n}$  and that the  $f_{k,2n}$  satisfy the recurrence relation (4.9) and hence also (4.11). If we define  $f_{0,2n} = 0$  for  $n \geq 1$  and  $f_{0,0} = 1$ , then (7.1) is true for  $k = 0, 1$  and therefore for all  $k \geq 0$ .

Reçu le 17 mai 1957.

<sup>4</sup> See, for example, *ibid.*, formula (6.15) of Chapter 12.