

# 3. The probability of no zeros.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **07.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. THE PROBABILITY OF NO ZEROS.

Let  $p_n$  be the probability that the first  $n$  steps do not lead to a return to the origin, that is,

$$(3.1) \quad p_n = P \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_n \neq 0 \}, \quad p_0 = 1.$$

THEOREM 1. We have

$$(3.2) \quad p_{2n} = u_{2n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*Proof.* Denote by  $A_r$  the event that among the partial sums  $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$  the last zero has index  $2r$ :

$$(3.3) \quad A_r = \{ S_{2r} = 0, S_{2r+1} \neq 0, S_{2r+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \} \\ = \{ S_{2r} = 0 \} \cap \{ S_{2r+1} - S_{2r} \neq 0, S_{2r+2} - S_{2r} \neq 0, \dots, S_{2n} - S_{2r} \neq 0 \}$$

The two events on the extreme right side are independent and have, respectively, probabilities  $u_{2r}$  and  $p_{2n-2r}$ . The union of the events  $A_r$  covers the sample space of the sequences  $S_0, \dots, S_n$ , and these events are mutually exclusive. Therefore

$$(3.4) \quad 1 = \sum_{r=0}^n P \{ A_r \} = \sum_{r=0}^n u_{2r} p_{2n-2r}$$

and a comparison of (3.4) with (3.1) proves the theorem.

The last theorem is fully equivalent to the following corollary which is well known.

COROLLARY. Let  $f_{2n}$  be the probability that the first return to the origin takes place at the  $2n$ -th step, that is,

$$(3.5) \quad f_{2n} = P \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0 \}.$$

Then

$$(3.6) \quad f_{2n} = u_{2n} - u_{2n-2}.$$

*Proof.* From (3.1) and (3.5) it is obvious that  $f_{2n} = u_{2n} - u_{2n-2}$ .