

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** THE NUMBERS OF ZEROS AND OF CHANGES OF SIGN IN A SYMMETRIC RANDOM WALK  
**Autor:** Feller, William  
**Kapitel:** 3. The probability of no zeros.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33746>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3. THE PROBABILITY OF NO ZEROS.

Let  $p_n$  be the probability that the first  $n$  steps do not lead to a return to the origin, that is,

$$(3.1) \quad p_n = P \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_n \neq 0 \}, \quad p_0 = 1.$$

THEOREM 1. We have

$$(3.2) \quad p_{2n} = u_{2n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*Proof.* Denote by  $A_r$  the event that among the partial sums  $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$  the last zero has index  $2r$ :

$$(3.3) \quad A_r = \{ S_{2r} = 0, S_{2r+1} \neq 0, S_{2r+2} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \} \\ = \{ S_{2r} = 0 \} \cap \{ S_{2r+1} - S_{2r} \neq 0, S_{2r+2} - S_{2r} \neq 0, \dots, S_{2n} - S_{2r} \neq 0 \}$$

The two events on the extreme right side are independent and have, respectively, probabilities  $u_{2r}$  and  $p_{2n-2r}$ . The union of the events  $A_r$  covers the sample space of the sequences  $S_0, \dots, S_n$ , and these events are mutually exclusive. Therefore

$$(3.4) \quad 1 = \sum_{r=0}^n P \{ A_r \} = \sum_{r=0}^n u_{2r} p_{2n-2r}$$

and a comparison of (3.4) with (3.1) proves the theorem.

The last theorem is fully equivalent to the following corollary which is well known.

COROLLARY. Let  $f_{2n}$  be the probability that the first return to the origin takes place at the  $2n$ -th step, that is,

$$(3.5) \quad f_{2n} = P \{ S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0 \}.$$

Then

$$(3.6) \quad f_{2n} = u_{2n} - u_{2n-2}.$$

*Proof.* From (3.1) and (3.5) it is obvious that  $f_{2n} = u_{2n} - u_{2n-2}$ .