

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE
Autor: Kervaire, Michel A.
Kapitel: 8. La formule de Gauss-Ostrogradski
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33741>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

8. LA FORMULE DE GAUSS-OSTROGRADSKI

se présente de façon tout à fait semblable à la formule de Stokes. Définissons tout d'abord l'intégrale de volume. Soit V un volume combinaison linéaire de morceaux: $V = \sum_i n_i V_i$. En postulant

$$\int_V f dV = \sum_i n_i \int_{V_i} f dV ,$$

on ramène la définition de $\int_V f dV$ au cas spécial où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$, $0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1$. Dans ce cas, on pose

$$\int_V f dV = \iiint f(u_1, u_2, u_3) (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) du_1 du_2 du_3 , \quad (8.1)$$

où $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ est le produit mixte $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ des vecteurs dérivées partielles $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial u_i$. L'intégrale triple (8.1) est étendue au cube unité $0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 \leq 1$.

Le théorème de Gauss affirme que dans le domaine de différentiabilité (continue) du champ \mathbf{F} , on a

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} , \quad \text{où } S = \partial V . \quad (8.2)$$

On suppose de nouveau que les morceaux constituant V admettent des dérivées partielles *secondes* continues.

A cause de la linéarité de l'intégrale, il est de nouveau suffisant de démontrer cette formule dans le cas particulier où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. On se sert à cet effet de la formule auxiliaire:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \cdot \mathbf{F} &= (\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + (\mathbf{F}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &= (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3 , \end{aligned} \quad (8.3)$$

où la deuxième égalité est triviale (les indices indiquent la dérivation partielle). On a

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \cdot \mathbf{F} du_1 du_2 du_3 ,$$

soit, d'après (8.3),

$$= \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 du_1 du_2 du_3 + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 du_1 du_2 du_3 + \\ + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3 du_1 du_2 du_3 .$$

En effectuant l'intégration partielle de la première intégrale suivant u_1 , de la seconde suivant u_2 , de la troisième suivant u_3 , il vient:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=1} du_2 du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=0} du_2 du_3 \\ + \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=1} du_1 du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=0} du_1 du_3 \\ + \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=1} du_1 du_2 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=0} du_1 du_2 .$$

Appelons u, v les variables d'intégration dans les six intégrales ci-dessus. En reprenant les notations de (5.3), on a

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint \mathbf{F}(1, u, v) \cdot \mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v} dudv - \iint \mathbf{F}(0, u, v) \cdot \mathbf{r}_{2u} \times \mathbf{r}_{2v} dudv \\ + \iint \mathbf{F}(u, 1, v) \cdot \mathbf{r}_{3v} \times \mathbf{r}_{3u} dudv - \iint \mathbf{F}(u, 0, v) \cdot \mathbf{r}_{4v} \times \mathbf{r}_{4u} dudv \\ + \iint \mathbf{F}(u, v, 1) \cdot \mathbf{r}_{5u} \times \mathbf{r}_{5v} dudv - \iint \mathbf{F}(u, v, 0) \cdot \mathbf{r}_{6u} \times \mathbf{r}_{6v} dudv , \\ = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_5} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} , \\ = \int_{S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{bV} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} .$$

Il reste à prouver la formule (8.3), ce qui est à nouveau mécanique. Il est suffisant de prouver la formule pour $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où \mathbf{a} est un vecteur constant. La formule à démontrer se réduit à

$$f_{u_1}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + f_{u_2}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + f_{u_3}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \mathbf{a} \cdot \nabla f ,$$

ou encore

$$f_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + f_2(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + f_3(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f .$$

On utilise

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (8.4)$$

en posant tout d'abord $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \nabla f$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$, d'où

$$\mathbf{r}_1 \times (\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f - f_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) ,$$

car $f_1 = \nabla f \cdot \mathbf{r}_1$, d'après (2.2).

En appliquant encore (8.4), cette fois avec $\mathbf{a} = \nabla f$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$:

$$\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = f_3 \cdot \mathbf{r}_2 - f_2 \cdot \mathbf{r}_3 ,$$

et par suite

$$f_3 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) - f_2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f - f_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) ,$$

ce qui est essentiellement la formule à démontrer.

Remarque. — L'analogie entre les démonstrations des théorèmes de Stokes et de Gauss n'est pas fortuite. Tous deux sont en fait des cas particuliers d'un seul et unique théorème beaucoup plus général dont la démonstration n'est pas essentiellement différente de celle présentée ci-dessus. (Cf. par exemple A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse linéaires*, § 148 ou B. Eckmann, *Differentiable manifolds*, Lecture Notes of the University of Michigan, 1950.)

Séminaire de physique théorique de l'Université de Berne

et

Dept. of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology.

Reçu le 7 janvier 1957.