Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Autor: Kervaire, Michel A.

Kapitel: 5. Bord algébrique d'une surface, d'un volume.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33741

sera dit *dégénéré* si l'une des dérivées partielles $\mathbf{r}_u$ ou $\mathbf{r}_v$ (ou les deux) s'annule identiquement. On a une définition similaire pour un morceau de volume V, représenté par $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ qui sera dit dégénéré si l'une au moins des dérivées partielles $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ est identiquement nulle.

On convient, dans le calcul avec les courbes, surfaces ou volumes, de ne pas distinguer entre éléments qui ne diffèrent que par une combinaison linéaire de morceaux dégénérés (par élément, nous entendons courbe, surface ou volume suivant le cas). Par exemple, si S_1 et S_2 sont deux morceaux dégénérés, on écrira $2S_1 + S_2 - S_3 = -S_3$ (« on néglige les éléments dégénérés » est une forme souple pour l'expression rigoureuse: on passe dans le groupe quotient modulo le sous-groupe engendré par les éléments dégénérés).

5. Bord algébrique d'une surface, d'un volume.

Le bord d'une surface sera une courbe (surface et courbe étant pris au sens des paragraphes précédents). Soit S une surface, on notera bS son bord [4]. On exige que le bord soit linéaire, i.e. si $S_1 = n_1 S_1 + n_2 S_2$ (au sens de l'addition des surfaces), on exige que $bS = n_1\, bS_1 + n_2\, bS_2$ (au sens de l'addition des courbes). Grâce à la linéarité [5], pour définir le bord d'une surface quelconque, il suffit de définir le bord d'un morceau de surface. Soit $\mathbf{r}(u, v)$ un tel morceau ($0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$), disons S. Il s'agit de définir bS. Soient C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ les courbes définies par les fonctions $\mathbf{r}_i(t)$ suivantes:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t)\ ,\quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t)\ ,\quad \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}(t, 1)\ ,\quad \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) \qquad (5.1)$$

(ce sont bien des morceaux de courbe car t varie dans le bon intervalle et les dérivées premières sont continues). On pose, par définition

$$bS = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 \qquad (5.2)$$

(où $-C$ est mis pour $(-1)\,C$).

---

[4] La notation usuelle (en topologie algébrique) est ∂S.

[5] On vérifiera que le bord d'un élément dégénéré est dégénéré. Ceci nous garantit que l'exigence de la linéarité n'est pas en contradiction avec la convention de négliger les éléments dégénérés.

Pour le bord d'un volume, on procède de façon semblable: le bord sera linéaire, i.e. $bV = n_1\, bV_1 + n_2\, bV_2$ (au sens de l'addition des surfaces) si $V = n_1 V_1 + n_2 V_2$. Il suffit donc de dire ce qu'est le bord d'un morceau de volume. Soit $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ un morceau V, son bord bV est la surface définie comme suit: Soient S_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ les morceaux de surfaces définis par $\mathbf{r}_i(u, v)$ comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v) &= \mathbf{r}(1, u, v)\ , & \mathbf{r}_2(u, v) &= \mathbf{r}(0, u, v) \\ \mathbf{r}_3(u, v) &= \mathbf{r}(u, 1, v)\ , & \mathbf{r}_4(u, v) &= \mathbf{r}(u, 0, v) \\ \mathbf{r}_5(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 1)\ , & \mathbf{r}_6(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 0)\ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Le bord bV est la surface, combinaison linéaire des S_i à coefficients entiers, donnée par

$$bV = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6\ . \tag{5.4}$$

Rappelons que dans ces expressions pour le bord on devra « négliger » les morceaux dégénérés s'il s'en présente.

6. Remarques et exemples.

Il y a deux différences essentiellement entre courbes, surfaces et volumes introduits au § 3 et les notions habituelles:

1° un morceau est muni d'une *paramétrisation* inhérente à sa définition. La figure géométrique « cercle » ne devient une courbe (ou éventuellement un morceau de courbe) qu'après que l'on a fait choix d'une paramétrisation. Ceci est sans doute contraire à l'idée géométrique, mais c'est adapté à l'intégration;

2° courbes, surfaces et volumes trouvent certes leur origine dans les notions géométriques et analytiques de morceaux de courbe, surface, volume; cependant ce sont essentiellement des objets algébriques avec lesquels on calcule formellement comme avec des formes linéaires d'indéterminées à coefficients entiers.

On peut naturellement paramétriser un *cercle* d'une infinité de manières. On en fait, par exemple, un morceau en prenant

$$\mathbf{r}(t) = \left\{ R\cos(2\pi t)\ ,\ R\sin(2\pi t)\ ,\ 0 \right\},\quad R = \text{rayon},\ 0 \leqq t \leqq 1. \tag{6.1}$$