Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Autor: Kervaire, Michel A.

Kapitel: 4. Remarques et conventions de calcul.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33741

toute valeur de l'argument dans un domaine fixé, on peut dire qu'un morceau de courbe est une application continûment différentiable du segment unité dans l'espace (vectoriel).

Une *courbe* est une combinaison linéaire finie de morceaux de courbe à coefficients entiers. Notation: $C = n_1 C_1 + n_2 C_2 + \ldots + n_k C_k$, où $C_1, \ldots, C_k$ sont des morceaux et $n_1, \ldots, n_k$ des entiers. Une courbe est un objet algébrique: on peut additionner et soustraire des courbes en formant la somme ou la différence des combinaisons linéaires qui les définissent (les courbes forment un groupe abélien libre). Exemple: Soient C_1, C_2, C_3 des morceaux; $C_1 + 3C_2$, $C_2 - 2C_3$ sont des courbes dont la différence est $C_1 + 2C_2 + 2C_3$ (on écrit $-C$ au lieu de $(-1)\, C$ pour simplifier les notations).

Les définitions sont analogues pour surfaces et volumes: un *morceau de surface* est une application continûment différentiable du carré unité dans l'espace, c'est-à-dire un vecteur $\mathbf{r}(u, v)$ fonction de deux paramètres u et v défini pour $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$, tel que les dérivées partielles $\mathbf{r}_u$ et $\mathbf{r}_v$ existent et soient continues pour toutes valeurs de u et v dans les limites assignées. Une *surface* est par définition une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux. Notation: $S = n_1 S_1 + n_2 S_2 + \ldots + n_k S_k$, où les $S_1, \ldots, S_k$ sont des morceaux et $n_1, \ldots, n_k$ des entiers.

Un *morceau de volume* est une application différentiable du cube unité dans l'espace. Un *volume* est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux de volume.

4. Remarques et conventions de calcul.

On n'exige pas que les applications $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(u, v)$ ou $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ soient biunivoques. En fait, on n'a même pas exigé que les dérivées partielles soient linéairement indépendantes. Un exemple extrême est celui où l'une des dérivées partielles est identiquement nulle.

On dira que le morceau de courbe C, représenté par $\mathbf{r}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ est *dégénéré*, si $\mathbf{r}^{\cdot}$ (la dérivée par rapport à t) est identiquement nulle (dans l'intervalle de définition $0 \leqq t \leqq 1$). De même, le morceau de surface S, donné par $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leqq u, v \leqq 1$

sera dit *dégénéré* si l'une des dérivées partielles $\mathbf{r}_u$ ou $\mathbf{r}_v$ (ou les deux) s'annule identiquement. On a une définition similaire pour un morceau de volume V, représenté par $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ qui sera dit dégénéré si l'une au moins des dérivées partielles $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ est identiquement nulle.

On convient, dans le calcul avec les courbes, surfaces ou volumes, de ne pas distinguer entre éléments qui ne diffèrent que par une combinaison linéaire de morceaux dégénérés (par élément, nous entendons courbe, surface ou volume suivant le cas). Par exemple, si S_1 et S_2 sont deux morceaux dégénérés, on écrira $2S_1 + S_2 - S_3 = -S_3$ (« on néglige les éléments dégénérés » est une forme souple pour l'expression rigoureuse: on passe dans le groupe quotient modulo le sous-groupe engendré par les éléments dégénérés).

5. Bord algébrique d'une surface, d'un volume.

Le bord d'une surface sera une courbe (surface et courbe étant pris au sens des paragraphes précédents). Soit S une surface, on notera bS son bord [4]. On exige que le bord soit linéaire, i.e. si $S_1 = n_1 S_1 + n_2 S_2$ (au sens de l'addition des surfaces), on exige que $bS = n_1\, bS_1 + n_2\, bS_2$ (au sens de l'addition des courbes). Grâce à la linéarité [5], pour définir le bord d'une surface quelconque, il suffit de définir le bord d'un morceau de surface. Soit $\mathbf{r}(u, v)$ un tel morceau $(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1)$, disons S. Il s'agit de définir bS. Soient C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ les courbes définies par les fonctions $\mathbf{r}_i(t)$ suivantes:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t)\ ,\quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t)\ ,\quad \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}(t, 1)\ ,\quad \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) \qquad (5.1)$$

(ce sont bien des morceaux de courbe car t varie dans le bon intervalle et les dérivées premières sont continues). On pose, par définition

$$bS = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 \qquad (5.2)$$

(où $-$ C est mis pour (-1) C).

---

[4] La notation usuelle (en topologie algébrique) est ∂S.

[5] On vérifiera que le bord d'un élément dégénéré est dégénéré. Ceci nous garantit que l'exigence de la linéarité n'est pas en contradiction avec la convention de négliger les éléments dégénérés.