

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE  
**Autor:** Kervaire, Michel A.  
**Kapitel:** 3. Courbes, surfaces, volumes (définitions).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33741>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'auteur tient à souligner qu'il ne prétend à aucune originalité dans le présent article. L'idée des démonstrations présentées est bien connue en théorie des variétés différentiables; on la trouve également mentionnée brièvement dans la « Vorlesung von Prof. Dr. W. Pauli: Elektrodynamik », *VMP*, 1949, page 5. L'intention de cette publication est de montrer que l'adaptation de ces démonstrations au niveau élémentaire ne fait pas de difficulté et qu'il serait par suite souhaitable de les voir s'introduire dans les cours d'analyse vectorielle.

## 2. PRÉLIMINAIRES.

Nous utiliserons les formules du calcul vectoriel sans référence explicite. Citons cependant

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j) , \quad (2.1)$$

où  $\times$  désigne le produit vectoriel et  $\cdot$  le produit scalaire.

De l'analyse vectorielle, on utilisera la forme que prend la formule de dérivation des fonctions composées: Si  $f$  est une fonction de  $x_1, x_2, x_3$  et que ces variables soient elles-mêmes des fonctions de  $u$  et  $v$  (par exemple), les dérivées partielles (si elles existent) de la fonction  $f(u, v)$  qui prend en  $(u, v)$  la valeur de la fonction  $f$  au point  $x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)$  sont données par

$$f_u = \nabla f \cdot \mathbf{r}_u , \quad f_v = \nabla f \cdot \mathbf{r}_v , \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , les lettres  $u$  et  $v$  en indice indiquant la dérivation partielle. On aura, en outre, besoin de la formule

$$\nabla \times f\mathbf{a} = \nabla f \times \mathbf{a} \quad (\mathbf{a}, \text{vecteur constant}). \quad (2.3)$$

## 3. COURBES, SURFACES, VOLUMES (DÉFINITIONS).

Dans la suite, un *morceau de courbe* sera une fonction  $\mathbf{r}(t)$  définie pour  $0 \leq t \leq 1$  qui fait correspondre à toute valeur de  $t$  dans cet intervalle un vecteur de l'espace noté  $\mathbf{r}(t)$ . On exige, en outre, que  $\mathbf{r}(t)$  possède au moins une dérivée première continue. Si l'on appelle *application* une fonction définie continue pour

toute valeur de l'argument dans un domaine fixé, on peut dire qu'un morceau de courbe est une application continûment différentiable du segment unité dans l'espace (vectoriel).

Une *courbe* est une combinaison linéaire finie de morceaux de courbe à coefficients entiers. Notation:  $C = n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k$ , où  $C_1, \dots, C_k$  sont des morceaux et  $n_1, \dots, n_k$  des entiers. Une courbe est un objet algébrique: on peut additionner et soustraire des courbes en formant la somme ou la différence des combinaisons linéaires qui les définissent (les courbes forment un groupe abélien libre). Exemple: Soient  $C_1, C_2, C_3$  des morceaux;  $C_1 + 3C_2, C_2 - 2C_3$  sont des courbes dont la différence est  $C_1 + 2C_2 + 2C_3$  (on écrit  $-C$  au lieu de  $(-1)C$  pour simplifier les notations).

Les définitions sont analogues pour surfaces et volumes: un *morceau de surface* est une application continûment différentiable du carré unité dans l'espace, c'est-à-dire un vecteur  $\mathbf{r}(u, \nu)$  fonction de deux paramètres  $u$  et  $\nu$  défini pour  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq \nu \leq 1$ , tel que les dérivées partielles  $\mathbf{r}_u$  et  $\mathbf{r}_\nu$  existent et soient continues pour toutes valeurs de  $u$  et  $\nu$  dans les limites assignées. Une *surface* est par définition une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux. Notation:  $S = n_1 S_1 + n_2 S_2 + \dots + n_k S_k$ , où les  $S_1, \dots, S_k$  sont des morceaux et  $n_1, \dots, n_k$  des entiers.

Un *morceau de volume* est une application différentiable du cube unité dans l'espace. Un *volume* est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux de volume.

#### 4. REMARQUES ET CONVENTIONS DE CALCUL.

On n'exige pas que les applications  $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(u, \nu)$  ou  $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$  soient biunivoques. En fait, on n'a même pas exigé que les dérivées partielles soient linéairement indépendantes. Un exemple extrême est celui où l'une des dérivées partielles est identiquement nulle.

On dira que le morceau de courbe  $C$ , représenté par  $\mathbf{r}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  est *dégénéré*, si  $\mathbf{r}'$  (la dérivée par rapport à  $t$ ) est identiquement nulle (dans l'intervalle de définition  $0 \leq t \leq 1$ ). De même, le morceau de surface  $S$ , donné par  $\mathbf{r}(u, \nu)$ ,  $0 \leq u, \nu \leq 1$