

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE
Autor: Kervaire, Michel A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33741>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE

PAR

Michel A. Kervaire, Boston

1. INTRODUCTION¹.

Le but du présent article est de préciser les démonstrations (et l'énoncé) des formules d'intégration de l'analyse vectorielle. Il s'agit essentiellement des formules

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1)$$

et

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.2)$$

dites théorèmes d'Ostrogradski (ou de Gauss) et de Stokes respectivement (\mathbf{F} , champ vectoriel dans l'espace tri-dimensionnel).

Dans les manuels d'analyse vectorielle (cf. G. Juvet, par exemple), on regarde souvent (1.1), ainsi que les formules

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S f d\mathbf{S} \quad (\text{Théorème du gradient}), \quad (1.1')$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F} \quad (\text{Théorème du rotationnel}), \quad (1.1'')$$

¹ Cette introduction a été rédigée en collaboration avec A. Mercier. Pendant la rédaction de l'article l'auteur avait un contrat avec la National Science Foundation.

comme presque triviales, parce qu'elles s'obtiennent assez rapidement à partir d'une définition de l'opérateur ∇ qui serait

$$\nabla \dots = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint d\mathbf{S} \dots}{V}.$$

La formule (1.2), ainsi que

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{Théorème anonyme dû à G. Juvet}^2), \quad (1.2')$$

sont alors démontrées avec plus ou moins de rigueur en regardant S comme la figure limite d'un volume d'épaisseur tendant vers zéro, dont la surface latérale finit par s'identifier à une ligne.

Outre que la légitimation de ces démonstrations nécessite (même dans le cas des formules « triviales ») un recours assez fastidieux au « formalisme des epsilons », il n'est guère satisfaisant de voir énoncer et démontrer des théorèmes où interviennent les notions de volume, bord d'un volume, bord d'une surface, sans que ces notions aient été définies. Cette lacune devient la source d'anomalies dès que l'on considère des surfaces pour lesquelles la notion intuitive de bord est douteuse. C'est ce qui se produit si l'on cherche à appliquer, par exemple, la formule de Stokes au ruban de Möbius³. Dans cet exemple (voir fig. 1), si C désigne la courbe qui « borde » le ruban et S le ruban lui-même, il est *inexact* que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{et} \quad \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

soient égales (en fait, il y a déjà ambiguïté sur le signe des intégrales en question).

² Cf. A. MERCIER, Expression des équations de l'électromagnétisme au moyen des nombres de Clifford. *Archives des S. phys. et nat.*, Genève, 17, p. 305, 1935.

³ On pourra objecter que dans la démonstration du théorème de Stokes (telle qu'elle est donnée par G. Juvet, par exemple) on suppose qu'il est possible d'étendre par continuité et de manière cohérente l'orientation de la normale à la surface, ce qui n'est pas le cas pour le ruban de Möbius. Il est facile de construire une surface *orientable* de « bord intuitif » C , disons, dont le bord algébrique (correct) est $2C$ (par exemple) et pour laquelle la formule de Stokes intuitive est donc en défaut. (Prendre la région de la surface de Riemann de $w = z^{1/2}$ limitée par $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$ et coller le long de $z = \frac{1}{2}$, 1 les bords des deux déterminations.)

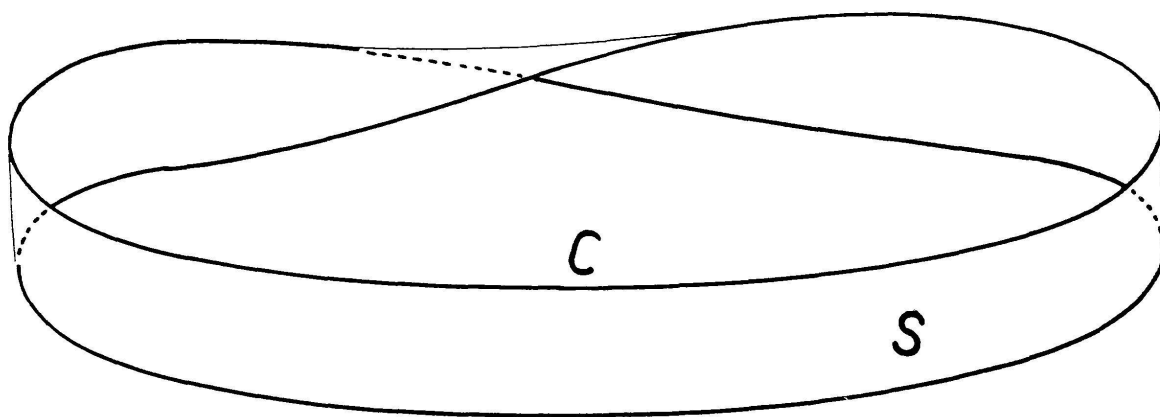


FIG. 1.

Dans ce qui suit nous démontrerons deux des formules rappelées, l'une de type trivial (1.1), l'autre de type non trivial (1.2), à l'aide d'une méthode qui évite les difficultés mentionnées. On verra par là aussi qu'il n'y a pas de différence réelle entre formules triviales et non triviales. Pour développer la méthode, nous devons emprunter des notions aux théories algébriques plus avancées de l'intégration, en particulier celles de courbes, surfaces et volumes et de leurs bords en tant que cas particuliers de notions appartenant à la topologie algébrique. Toutefois nous nous restreindrons à un exposé assez élémentaire pour être accessible à l'étudiant d'un cours moyen sur le calcul vectoriel.

Nous nous limitons aux démonstrations de (1.1) et (1.2) car (1.1') et (1.1'') découlent immédiatement de (1.1): Pour tout vecteur constant \mathbf{a} , on a

$$\mathbf{a} \cdot \int_V \nabla f dV = \int_V \nabla \cdot (f\mathbf{a}) dV = \oint_S f\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \oint_S f d\mathbf{S}, \text{ d'où (1.1')}$$

(remarque similaire pour (1.1'')). De manière analogue, (1.2') découle de (1.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{a} = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{a}), \text{ d'après (1.2),} \\ &= \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{a} = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

où \mathbf{a} désigne un vecteur constant quelconque.

L'auteur tient à souligner qu'il ne prétend à aucune originalité dans le présent article. L'idée des démonstrations présentées est bien connue en théorie des variétés différentiables; on la trouve également mentionnée brièvement dans la « Vorlesung von Prof. Dr. W. Pauli: Elektrodynamik », *VMP*, 1949, page 5. L'intention de cette publication est de montrer que l'adaptation de ces démonstrations au niveau élémentaire ne fait pas de difficulté et qu'il serait par suite souhaitable de les voir s'introduire dans les cours d'analyse vectorielle.

2. PRÉLIMINAIRES.

Nous utiliserons les formules du calcul vectoriel sans référence explicite. Citons cependant

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 = \det(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j) , \quad (2.1)$$

où \times désigne le produit vectoriel et \cdot le produit scalaire.

De l'analyse vectorielle, on utilisera la forme que prend la formule de dérivation des fonctions composées: Si f est une fonction de x_1, x_2, x_3 et que ces variables soient elles-mêmes des fonctions de u et v (par exemple), les dérivées partielles (si elles existent) de la fonction $f(u, v)$ qui prend en (u, v) la valeur de la fonction f au point $x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)$ sont données par

$$f_u = \nabla f \cdot \mathbf{r}_u , \quad f_v = \nabla f \cdot \mathbf{r}_v , \quad (2.2)$$

où $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$, les lettres u et v en indice indiquant la dérivation partielle. On aura, en outre, besoin de la formule

$$\nabla \times f\mathbf{a} = \nabla f \times \mathbf{a} \quad (\mathbf{a}, \text{ vecteur constant}). \quad (2.3)$$

3. COURBES, SURFACES, VOLUMES (DÉFINITIONS).

Dans la suite, un *morceau de courbe* sera une fonction $\mathbf{r}(t)$ définie pour $0 \leq t \leq 1$ qui fait correspondre à toute valeur de t dans cet intervalle un vecteur de l'espace noté $\mathbf{r}(t)$. On exige, en outre, que $\mathbf{r}(t)$ possède au moins une dérivée première continue. Si l'on appelle *application* une fonction définie continue pour

toute valeur de l'argument dans un domaine fixé, on peut dire qu'un morceau de courbe est une application continûment différentiable du segment unité dans l'espace (vectoriel).

Une *courbe* est une combinaison linéaire finie de morceaux de courbe à coefficients entiers. Notation: $C = n_1 C_1 + n_2 C_2 + \dots + n_k C_k$, où C_1, \dots, C_k sont des morceaux et n_1, \dots, n_k des entiers. Une courbe est un objet algébrique: on peut additionner et soustraire des courbes en formant la somme ou la différence des combinaisons linéaires qui les définissent (les courbes forment un groupe abélien libre). Exemple: Soient C_1, C_2, C_3 des morceaux; $C_1 + 3C_2, C_2 - 2C_3$ sont des courbes dont la différence est $C_1 + 2C_2 + 2C_3$ (on écrit $-C$ au lieu de $(-1)C$ pour simplifier les notations).

Les définitions sont analogues pour surfaces et volumes: un *morceau de surface* est une application continûment différentiable du carré unité dans l'espace, c'est-à-dire un vecteur $\mathbf{r}(u, v)$ fonction de deux paramètres u et v défini pour $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$, tel que les dérivées partielles \mathbf{r}_u et \mathbf{r}_v existent et soient continues pour toutes valeurs de u et v dans les limites assignées. Une *surface* est par définition une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux. Notation: $S = n_1 S_1 + n_2 S_2 + \dots + n_k S_k$, où les S_1, \dots, S_k sont des morceaux et n_1, \dots, n_k des entiers.

Un *morceau de volume* est une application différentiable du cube unité dans l'espace. Un *volume* est une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de morceaux de volume.

4. REMARQUES ET CONVENTIONS DE CALCUL.

On n'exige pas que les applications $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(u, v)$ ou $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ soient biunivoques. En fait, on n'a même pas exigé que les dérivées partielles soient linéairement indépendantes. Un exemple extrême est celui où l'une des dérivées partielles est identiquement nulle.

On dira que le morceau de courbe C , représenté par $\mathbf{r}(t)$, $0 \leq t \leq 1$ est *dégénéré*, si \mathbf{r}' (la dérivée par rapport à t) est identiquement nulle (dans l'intervalle de définition $0 \leq t \leq 1$). De même, le morceau de surface S , donné par $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leq u, v \leq 1$

sera dit *dégénéré* si l'une des dérivées partielles \mathbf{r}_u ou \mathbf{r}_v (ou les deux) s'annule identiquement. On a une définition similaire pour un morceau de volume V , représenté par $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ qui sera dit dégénéré si l'une au moins des dérivées partielles $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ est identiquement nulle.

On convient, dans le calcul avec les courbes, surfaces ou volumes, de ne pas distinguer entre éléments qui ne diffèrent que par une combinaison linéaire de morceaux dégénérés (par élément, nous entendons courbe, surface ou volume suivant le cas). Par exemple, si S_1 et S_2 sont deux morceaux dégénérés, on écrira $2S_1 + S_2 - S_3 = -S_3$ (« on néglige les éléments dégénérés » est une forme souple pour l'expression rigoureuse : on passe dans le groupe quotient modulo le sous-groupe engendré par les éléments dégénérés).

5. BORD ALGÈBRIQUE D'UNE SURFACE, D'UN VOLUME.

Le bord d'une surface sera une courbe (surface et courbe étant pris au sens des paragraphes précédents). Soit S une surface, on notera bS son bord ⁴. On exige que le bord soit linéaire, i.e. si $S_1 = n_1 S_1 + n_2 S_2$ (au sens de l'addition des surfaces), on exige que $bS = n_1 bS_1 + n_2 bS_2$ (au sens de l'addition des courbes). Grâce à la linéarité ⁵, pour définir le bord d'une surface quelconque, il suffit de définir le bord d'un morceau de surface. Soit $\mathbf{r}(u, v)$ un tel morceau ($0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$), disons S . Il s'agit de définir bS . Soient $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ les courbes définies par les fonctions $\mathbf{r}_i(t)$ suivantes :

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t), \quad \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}(t, 1), \quad \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) \quad (5.1)$$

(ce sont bien des morceaux de courbe car t varie dans le bon intervalle et les dérivées premières sont continues). On pose, par définition

$$bS = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 \quad (5.2)$$

(où $-C$ est mis pour $(-1)C$).

⁴ La notation usuelle (en topologie algébrique) est ∂S .

⁵ On vérifiera que le bord d'un élément dégénéré est dégénéré. Ceci nous garantit que l'exigence de la linéarité n'est pas en contradiction avec la convention de négliger les éléments dégénérés.

Pour le bord d'un volume, on procède de façon semblable: le bord sera linéaire, i.e. $bV = n_1 bV_1 + n_2 bV_2$ (au sens de l'addition des surfaces) si $V = n_1 V_1 + n_2 V_2$. Il suffit donc de dire ce qu'est le bord d'un morceau de volume. Soit $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ un morceau V , son bord bV est la surface définie comme suit: Soient $S_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ les morceaux de surfaces définis par $\mathbf{r}_i(u, v)$ comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, v) &= \mathbf{r}(1, u, v), & \mathbf{r}_2(u, v) &= \mathbf{r}(0, u, v) \\ \mathbf{r}_3(u, v) &= \mathbf{r}(u, 1, v), & \mathbf{r}_4(u, v) &= \mathbf{r}(u, 0, v) \\ \mathbf{r}_5(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 1), & \mathbf{r}_6(u, v) &= \mathbf{r}(u, v, 0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le bord bV est la surface, combinaison linéaire des S_i à coefficients entiers, donnée par

$$bV = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6. \quad (5.4)$$

Rappelons que dans ces expressions pour le bord on devra « négliger » les morceaux dégénérés s'il s'en présente.

6. REMARQUES ET EXEMPLES.

Il y a deux différences essentiellement entre courbes, surfaces et volumes introduits au § 3 et les notions habituelles:

- 1° un morceau est muni d'une *paramétrisation* inhérente à sa définition. La figure géométrique « cercle » ne devient une courbe (ou éventuellement un morceau de courbe) qu'après que l'on a fait choix d'une paramétrisation. Ceci est sans doute contraire à l'idée géométrique, mais c'est adapté à l'intégration;
- 2° courbes, surfaces et volumes trouvent certes leur origine dans les notions géométriques et analytiques de morceaux de courbe, surface, volume; cependant ce sont essentiellement des objets algébriques avec lesquels on calcule formellement comme avec des formes linéaires d'indéterminées à coefficients entiers.

On peut naturellement paramétriser un *cercle* d'une infinité de manières. On en fait, par exemple, un morceau en prenant

$$\mathbf{r}(t) = \{ R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), 0 \}, \quad R = \text{rayon}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6.1)$$

L'application

$$\mathbf{r}(u, v) = \{ Ru \cdot \cos(2\pi v), Ru \cdot \sin(2\pi v), 0 \}, \quad 0 \leq u, v \leq 1, \quad (6.2)$$

définit un *disque* D. Cherchons bD : on a (cf. (5.1))

$$C_1 \text{ est donné par } \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t) = \{ R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), 0 \}$$

$$C_2 \text{ est donné par } \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t) = \{ 0, 0, 0 \}$$

$$C_3 \text{ est donné par } \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}(t, 1) = \{ tR, 0, 0 \}$$

$$C_4 \text{ est donné par } \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) = \{ tR, 0, 0 \}$$

par suite C_2 est dégénérée, $C_3 = C_4$, et l'on a

$$bD = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = C_1.$$

La formule

$$\mathbf{r}(u, v) \equiv \{ R \cos(2\pi v) \cdot \sin(\pi u), R \sin(2\pi v) \cdot \sin(\pi u), R \cos(\pi u) \} \quad (6.3)$$

permet de regarder la *sphère* comme morceau de surface au sens du § 3. Cherchons le bord du morceau S défini par la formule ci-dessus. Les morceaux C_1, \dots, C_4 définis par (5.1) ont les propriétés $C_1 = C_2 = 0$ (dégénérés), $C_3 = C_4$. Donc $bS = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = -C_3 + C_4 = 0$.

La *boule* de rayon R est donnée comme morceau de volume par

$$\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = \{ Ru_1 \cos(2\pi u_3) \sin(\pi u_2), Ru_1 \sin(2\pi u_3) \sin(\pi u_2), Ru \cos(\pi u_2) \} \quad (6.4)$$

où $0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1$.

On vérifie aisément en utilisant (5.3) que le bord de la boule est la sphère représentée par (6.3).

On peut également représenter le *tore* comme morceau de surface, la formule est la suivante:

$$\mathbf{r}(u, v) = \{ R \cos(2\pi u) - r \sin(2\pi v) \cos(2\pi u), R \sin(2\pi u) - r \sin(2\pi v) \sin(2\pi u), r \cos(2\pi v) \}. \quad (6.5)$$

On vérifie aisément que le bord de cette surface est zéro.

Etudions maintenant le cas du *ruban de Möbius*. On peut le représenter par un morceau de surface dont la fonction $\mathbf{r}(u, v)$ a la propriété

$$\mathbf{r}(1, t) = \mathbf{r}(t, 0),$$

ce qui implique $C_1 = C_4$ (notations de (5.1)). On peut écrire les formules explicites de plusieurs manières⁶ toutes compliquées et pas très instructives. La figure 2 permet de se faire une idée

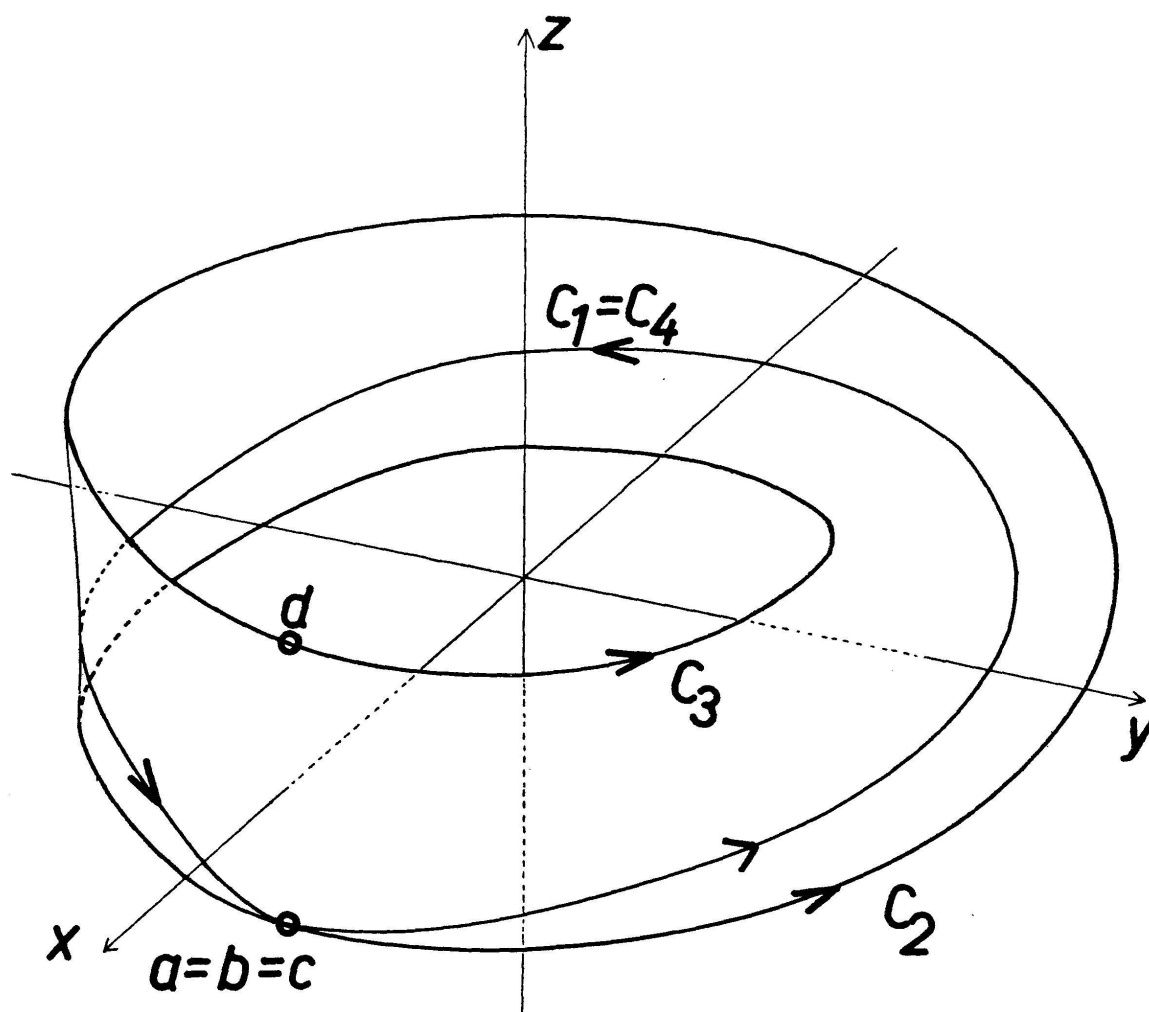


FIG. 2.

Ruban de Möbius obtenu par une application différentiable du carré unité

Les points a, b, c, d sont les images des sommets.

La figure correspond à peu près aux formules du texte

$$\text{avec } L_u = \frac{1}{2} \cdot \cos(\pi u (1 - v)).$$

⁶ Prendre, par exemple:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left\{ \cos \theta \cdot (1 - L \sin \frac{1}{2} \theta), \sin \theta \cdot (1 - L \sin \frac{1}{2} \theta), L \cos \frac{1}{2} \theta \right\},$$

où $\theta = 2\pi(u + v - 1)$ et $L = l \cos(\pi u (1 - v))$, $0 \leq u, v \leq 1$ ($2l$ est la largeur du ruban).

de l'application $\mathbf{r}(u, v)$. L'essentiel ici est bien entendu de voir que la formule du bord montre que le bord du ruban de Möbius n'est pas la seule courbe frontière (au sens intuitif) qui est représentée par $(-1)(C_2 + C_3)$ avec nos notations, mais pour la paramétrisation ci-dessus $bS = 2C_1 + (-1)(C_2 + C_3)$, la contribution de la courbe C_1 étant tout à fait inattendue de l'intuition. Si l'on prend l'expression correcte ci-dessus pour le bord, la formule de Stokes est alors valable, comme il sera démontré au paragraphe suivant.

7. LA FORMULE DE STOKES.

On définit comme suit les intégrales curvilignes et de surface. Soit \mathbf{F} un champ de vecteurs (fonction associant à tout point d'une région de l'espace un vecteur qui dépend de manière continue de l'argument), l'intégrale $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de \mathbf{F} le long de la courbe C est définie d'abord dans le cas où C est un morceau. On pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt, \quad (7.1)$$

où $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $\mathbf{r}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ étant la fonction qui définit C . Dans le cas plus général où C est une courbe: $C = n_1 C_1 + \dots + n_k C_k$, où C_1, \dots, C_k sont des morceaux, on pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i n_i \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.2)$$

Pour l'intégrale de surface, l'exigence de la linéarité⁷ permet à nouveau de n'avoir à donner de formule explicite que dans le cas du morceau. Soit $\mathbf{r}(u, v)$ un morceau de surface S ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$). On pose

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v du dv \quad (7.3)$$

⁷ La non-contradiction de cette exigence avec la convention de négliger les éléments dégénérés est aisément vérifiée en constatant que l'intégrale étendue à un morceau dégénéré est nulle.

où l'intégrale double (de la fonction numérique $\mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$) est étendue au carré unité $0 \leq u, v \leq 1$. On a dénoté par $\mathbf{F}(u, v)$ le vecteur $\mathbf{F}(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, où $\mathbf{r}(u, v) = \{x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)\}$.

Soit S une surface dont les morceaux admettent des dérivées partielles *secondes* continues et \mathbf{F} un champ de vecteur. Le théorème de Stokes affirme que

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{où } C = bS, \quad (7.4)$$

pourvu que \mathbf{F} ait des dérivées partielles premières continues dans une région contenant S .

Démonstration. — Il est suffisant de se limiter au cas où S est un *morceau* de surface si: $S = n_1 S_1 + \dots + n_k S_k$, où les S_i sont des morceaux, alors

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

et si l'on sait que (7.4) vaut pour un morceau, on en tire

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \oint_{bS_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{bS} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

car

$$bS = \sum_1^k n_i bS_i.$$

Soit donc S un morceau $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. On a besoin de la formule auxiliaire

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{F}_u \cdot \mathbf{r}_v - \mathbf{F}_v \cdot \mathbf{r}_u = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v)_u - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u)_v, \quad (7.5)$$

la deuxième égalité étant triviale (continuité des dérivées partielles secondes de \mathbf{r}).

On a

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du \, dv = \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_v)_u \, du \, dv - \\ &\quad - \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_u)_v \, du \, dv. \end{aligned}$$

Par intégration partielle de la première intégrale selon u et de la seconde selon v , il vient (avec les notations de (5.1)):

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 (\mathbf{F}(1, v) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}(0, v) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) dv - \int_0^1 (\mathbf{F}(u, 1) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3 - \mathbf{F}(u, 0) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4) du$$

et en appelant t la variable d'intégration dans chaque intégrale:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 (\mathbf{F}(1, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1) dt - \int_0^1 (\mathbf{F}(0, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2) dt - \int_0^1 (\mathbf{F}(t, 1) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3) dt + \\ &+ \int_0^1 (\mathbf{F}(t, 0) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4) dt = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ (cf. (7.2)).} \end{aligned}$$

Il reste à prouver la formule (7.5), ce qui est mécanique: Comme \mathbf{F} intervient linéairement dans (7.5), il suffit de démontrer cette formule pour un champ spécial de la forme $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où \mathbf{a} est un vecteur constant et f une fonction numérique (en effet, en choisissant une base vectorielle $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, on a bien $\mathbf{F} = f_1 \mathbf{a}_1 + f_2 \mathbf{a}_2 + f_3 \mathbf{a}_3$. Si la formule (7.5) est prouvée pour chaque $f_i \mathbf{a}_i$, elle l'est par linéarité pour \mathbf{F} lui-même). Soit donc $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, la formule à prouver se réduit à $\nabla \times f\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = f_u \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v - f_v \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u$. On a

$$\nabla \times f\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \nabla f \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v,$$

d'après (2.3), puis

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \nabla f \cdot \mathbf{r}_u & \nabla f \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.1),} \\ &= \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.2), c.q.f.d.} \end{aligned}$$

8. LA FORMULE DE GAUSS-OSTROGRADSKI

se présente de façon tout à fait semblable à la formule de Stokes. Définissons tout d'abord l'intégrale de volume. Soit V un volume combinaison linéaire de morceaux: $V = \sum_i n_i V_i$. En postulant

$$\int_V f dV = \sum_i n_i \int_{V_i} f dV,$$

on ramène la définition de $\int_V f dV$ au cas spécial où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$, $0 \leq u_1, u_2, u_3 \leq 1$. Dans ce cas, on pose

$$\int_V f dV = \iiint f(u_1, u_2, u_3) (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) du_1 du_2 du_3, \quad (8.1)$$

où $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ est le produit mixte $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ des vecteurs dérivées partielles $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial u_i$. L'intégrale triple (8.1) est étendue au cube unité $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 \leq 1$.

Le théorème de Gauss affirme que dans le domaine de différentiabilité (continue) du champ \mathbf{F} , on a

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{où } S = \partial V. \quad (8.2)$$

On suppose de nouveau que les morceaux constituant V admettent des dérivées partielles *secondes* continues.

A cause de la linéarité de l'intégrale, il est de nouveau suffisant de démontrer cette formule dans le cas particulier où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. On se sert à cet effet de la formule auxiliaire:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \cdot \mathbf{F} &= (\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + (\mathbf{F}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &= (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3, \end{aligned} \quad (8.3)$$

où la deuxième égalité est triviale (les indices indiquent la dérivation partielle). On a

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \cdot \mathbf{F} du_1 du_2 du_3,$$

soit, d'après (8.3),

$$= \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 du_1 du_2 du_3 + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 du_1 du_2 du_3 + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3 du_1 du_2 du_3 .$$

En effectuant l'intégration partielle de la première intégrale suivant u_1 , de la seconde suivant u_2 , de la troisième suivant u_3 , il vient:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=1} du_2 du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=0} du_2 du_3 \\ &+ \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=1} du_1 du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=0} du_1 du_3 \\ &+ \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=1} du_1 du_2 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=0} du_1 du_2 . \end{aligned}$$

Appelons u, v les variables d'intégration dans les six intégrales ci-dessus. En reprenant les notations de (5.3), on a

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint \mathbf{F}(1, u, v) \cdot \mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v} dudv - \iint \mathbf{F}(0, u, v) \cdot \mathbf{r}_{2u} \times \mathbf{r}_{2v} dudv \\ &+ \iint \mathbf{F}(u, 1, v) \cdot \mathbf{r}_{3v} \times \mathbf{r}_{3u} dudv - \iint \mathbf{F}(u, 0, v) \cdot \mathbf{r}_{4v} \times \mathbf{r}_{4u} dudv \\ &+ \iint \mathbf{F}(u, v, 1) \cdot \mathbf{r}_{5u} \times \mathbf{r}_{5v} dudv - \iint \mathbf{F}(u, v, 0) \cdot \mathbf{r}_{6u} \times \mathbf{r}_{6v} dudv , \\ &= \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_5} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} , \\ &= \int_{S_1-S_2-S_3+S_4+S_5-S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{bV} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} . \end{aligned}$$

Il reste à prouver la formule (8.3), ce qui est à nouveau mécanique. Il est suffisant de prouver la formule pour $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où \mathbf{a} est un vecteur constant. La formule à démontrer se réduit à

$$f_{u_1}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + f_{u_2}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + f_{u_3}(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \mathbf{a} \cdot \nabla f ,$$

ou encore

$$f_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + f_2(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + f_3(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f .$$

On utilise

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (8.4)$$

en posant tout d'abord $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \nabla f$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$, d'où

$$\mathbf{r}_1 \times (\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f - f_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) ,$$

car $f_1 = \nabla f \cdot \mathbf{r}_1$, d'après (2.2).

En appliquant encore (8.4), cette fois avec $\mathbf{a} = \nabla f$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$:

$$\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = f_3 \cdot \mathbf{r}_2 - f_2 \cdot \mathbf{r}_3 ,$$

et par suite

$$f_3 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) - f_2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f - f_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) ,$$

ce qui est essentiellement la formule à démontrer.

Remarque. — L'analogie entre les démonstrations des théorèmes de Stokes et de Gauss n'est pas fortuite. Tous deux sont en fait des cas particuliers d'un seul et unique théorème beaucoup plus général dont la démonstration n'est pas essentiellement différente de celle présentée ci-dessus. (Cf. par exemple A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse linéaires*, § 148 ou B. Eckmann, *Differentiable manifolds*, Lecture Notes of the University of Michigan, 1950.)

Séminaire de physique théorique de l'Université de Berne

et

Dept. of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology.

Reçu le 7 janvier 1957.