

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	3 (1957)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN
<b>Autor:</b>	Haefliger, André / Reeb, Georges
<b>Kapitel:</b>	Classification des structures feuilletées du plan.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-33740">https://doi.org/10.5169/seals-33740</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

aux quotients une fonction  $r$ -différentiable  $g'$  sur  $V'$  qui coïncide avec  $f'$  au voisinage de  $x'$ .

*Démonstration du théorème 4.*

Il est en général nécessaire de supposer que  $\Omega$  est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient  $0_1$  et  $0_2$  deux exemplaires du plan  $R^2$ ; dans l'espace somme  $0_1 + 0_2$  considérons la relation d'équivalence qui identifie les points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  tels que  $x_2 = x_1 + 1/y_1$ ,  $y_2 = y_1^3$  pour tout  $y_1 < 0$  et qui se réduit à l'identité pour les points tels que  $y_1 \geq 0$  ou  $y_2 \geq 0$ . L'espace quotient  $E$  est homéomorphe au plan  $R^2$ ; les deux cartes  $0_1$  et  $0_2$  forment un atlas qui définit sur  $E$  une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe  $C^\infty$  dont l'espace des feuilles soit une plume composée  $V$  (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe  $C^\infty$  telle que toute fonction différentiable sur  $V$  se réduise à une constante.

#### CLASSIFICATION DES STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient  $V$  associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit  $V$  une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit  $A$  un atlas de  $R$  sur  $V$  définissant une orientation de  $V$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux points de  $V$  qui ne sont pas séparés. Nous dirons que  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons  $x_1 \sim x_2$  mod.  $\lambda^+$  (respectivement  $\lambda^-$ ) si, étant données deux cartes  $h_1$  et  $h_2$  de  $A$  telles

74771

# VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

PAR

André HAEFLIGER, Paris, et Georges REEB, Grenoble

*paru dans le vol. III, fasc. 2, à placer à la page 125.*

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENDIXON, Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24 (1901), pp. 1-80.
  - [2] KAMKE, Über die partielle Differentialgleichung  $fz_x + gz_y = h$ . *Math. Zeitschr.*, vol. 4 (1936), pp. 56-66 et vol. 42 (1936), pp. 287-300.
  - [3] KAPLAN, Regular curve families filling the plane I, II. *Duke Journ.*, 7 (1940), pp. 154-185 et 8 (1941), pp. 11-46.
  - [4] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7 sphere. *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 399-405.
  - [5] POINCARÉ, Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Œuvres*, tome I.
  - [6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Act. Scient. et Ind.*, 1183, Hermann, 1952.
  - [7] T. WAZEWSKY, Sur l'équation  $Pp + Qq = 0$ . *Mathematica*, 8 (1934), pp. 103-116; 9 (1935), pp. 179-182.
-

vide-leer-empty

que  $h_1(0) = x_1$  et  $h_2(0) = x_2$ ,  $h_2^{-1} h_1$  est défini pour des points d'abscisse  $> 0$  (respectivement  $< 0$ ). Ces deux relations sont des relations d'équivalence. Chaque classe contient un nombre fini ou dénombrable de points.

Appelons *structure feuilletée orientée du plan*  $R^2$  une structure feuilletée du plan orienté  $R^2$  avec une orientation cohérente des feuilles et disons que deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de  $R^2$  sur  $R^2$  qui transporte la première structure munie de son orientation sur la seconde structure munie de son orientation. (Remarquons que toute structure feuilletée du plan peut être orientée.)

On montre alors que l'espace des feuilles  $V$  de toute structure orientée du plan est une variété à une dimension orientée pour laquelle un ordre est déterminé canoniquement dans chaque classe d'équivalence modulo  $\lambda^+$  ou  $\lambda^-$ . On dira que la variété orientée  $V$  est munie d'une structure d'ordre.

Deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes si et seulement s'il existe un homéomorphisme de l'espace des feuilles de la première structure sur l'espace des feuilles de la deuxième structure qui conserve la structure d'ordre.

Enfin, à toute variété à une dimension à base dénombrable, simplement connexe, orientée et munie d'une structure d'ordre, correspond une structure feuilletée du plan.

Reçu le 6 décembre 1956.