

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN
Autor: Haefliger, André / Reeb, Georges
Kapitel: 2.3. Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) est une structure feuilletée différentiable de classe C^r (ou analytique), l'espace des feuilles V est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe C^r (ou analytique).

Comme \mathbb{R}^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numérique. Soit π la projection canonique de \mathbb{R}^2 sur V ; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué O_i . La relation d'équivalence induite par ρ dans O_i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i . Donc $\pi(O_i)$ qui est un voisinage ouvert de z , puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à O_i/ρ_i , c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur \mathbb{R}^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit \bar{h}_i la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes \bar{h}_i de \mathbb{R} dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2:1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient \mathbb{R}^2/ρ dans \mathbb{R} ; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur \mathbb{R}^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.

Démonstration du théorème 3.

Si le théorème est vrai pour les ouverts bornés et simplement connexes de \mathbb{R}^2 , il le sera également pour tout ouvert Ω borné; il suffit de considérer l'ouvert C limité par un cercle qui contient Ω ; si φ est une fonction dans C qui satisfait aux conditions du théorème, il en sera évidemment de même de sa restriction à Ω .

Ainsi le théorème de Kamke est une conséquence de la proposition 1 de 1.3 et de la proposition suivante:

PROPOSITION: L'espace des feuilles $V' = \Omega/\rho'$ de la structure feuilletée (F') induite par (F) sur Ω est munie d'une structure de variété différentiable régulière de classe C^r .

Soient π et π' respectivement les projections canoniques de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{R}^2/\rho = V$ et $\Omega/\rho' = V'$. L'injection canonique $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par passage aux quotients une application continue ψ de V' dans V . Comme tout ouvert distingué de Ω est un ouvert distingué de \mathbb{R}^2 , l'application ψ étale V' dans V ; elle est r -différentiable et partout de rang 1.

Soit x' un point de V' et soit x le point $\psi(x')$. Comme Ω est relativement compact, l'intersection de la feuille $F = \pi^{-1}(x)$ avec l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est compacte. On peut alors trouver un ouvert distingué W dans \mathbb{R}^2 suffisamment étroit et allongé pour contenir $F \cap \overline{\Omega}$ et tel que $W \cap \Omega$ soit saturé par des feuilles de Ω . Il est appliqué par π sur un ouvert U homéomorphe à un intervalle et contenant x . Soit f' une fonction r -différentiable définie sur un voisinage U' homéomorphe à un intervalle de x' dans V' suffisamment petit pour que $\psi(U') \subset U$. L'application f obtenue en composant l'inverse de la restriction de ψ à U' avec l'application f' est une fonction r -différentiable définie sur un voisinage de x . Comme U est homéomorphe à un intervalle, il est possible de construire une fonction r -différentiable g sur U qui coïncide avec f sur un voisinage de x et qui s'annule en dehors d'un compact K contenu dans U . Comme $\pi^{-1}(K) \cap W \cap \Omega$ est un fermé dans Ω et qu'il est saturé par des feuilles de Ω , la fonction égale à $g\pi$ sur $W \cap \Omega$ et à zéro aux autres points de Ω est r -différentiable et définit par passage

aux quotients une fonction r -différentiable g' sur V' qui coïncide avec f' au voisinage de x' .

Démonstration du théorème 4.

Il est en général nécessaire de supposer que Ω est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient O_1 et O_2 deux exemplaires du plan \mathbb{R}^2 ; dans l'espace somme $O_1 + O_2$ considérons la relation d'équivalence qui identifie les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_2 = x_1 + 1/y_1$, $y_2 = y_1^3$ pour tout $y_1 < 0$ et qui se réduit à l'identité pour les points tels que $y_1 \geq 0$ ou $y_2 \geq 0$. L'espace quotient E est homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 ; les deux cartes O_1 et O_2 forment un atlas qui définit sur E une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe C^∞ dont l'espace des feuilles soit une plume composée V (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toute fonction différentiable sur V se réduise à une constante.

CLASSIFICATION DES STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient V associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit V une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit A un atlas de \mathbb{R} sur V définissant une orientation de V . Soient x_1 et x_2 deux points de V qui ne sont pas séparés. Nous dirons que x_1 et x_2 ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons $x_1 \sim x_2 \text{ mod. } \lambda^+$ (respectivement λ^-) si, étant données deux cartes h_1 et h_2 de A telles