

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN
Autor: Haefliger, André / Reeb, Georges
Kapitel: 2.2. L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe C^r du plan \mathbb{R}^2 . Soit Ω un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique ψ définie dans Ω et qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i) ψ est r -différentiable et le gradient de ψ est différent de 0 en tout point de Ω ;
- (ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur Ω .

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan \mathbb{R}^2 d'une structure feuilletée de classe C^∞ telle que toute fonction r -différentiable sur \mathbb{R}^2 et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

Exemples de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y = Cte$ sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan \mathbb{R}^2 . La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à \mathbb{R}^2 une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans \mathbb{R}^2 de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0, y \geq 0$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U .

2.2. L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: Soit (F) une structure feuilletée du plan \mathbb{R}^2 . L'espace quotient V de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence ρ associée

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) est une structure feuilletée différentiable de classe C^r (ou analytique), l'espace des feuilles V est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe C^r (ou analytique).

Comme \mathbb{R}^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numérique. Soit π la projection canonique de \mathbb{R}^2 sur V ; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué O_i . La relation d'équivalence induite par ρ dans O_i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i . Donc $\pi(O_i)$ qui est un voisinage ouvert de z , puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à O_i/ρ_i , c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur \mathbb{R}^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit \bar{h}_i la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes \bar{h}_i de \mathbb{R} dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2:1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient \mathbb{R}^2/ρ dans \mathbb{R} ; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur \mathbb{R}^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.