

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN  
**Autor:** Haefliger, André / Reeb, Georges  
**Kapitel:** 2.1. Rappel de définitions et de propriétés classiques.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33740>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'intervalle  $[-1, +1]$  défini par  $t'_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} h_k^{-1} h_{n+1}(t)$  et soit  $x' = \tilde{h}_k(t'_0)$ ; le point  $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$  n'est pas séparé de  $x'$ . Il existe une fonction  $r$ -différentiable  $g$  dans  $V$  qui coïncide avec  $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$  sur un voisinage de  $x'$ ; comme  $g$  est de rang 1 en  $x'$ , elle l'est également en  $x$  (lemme 1). La fonction qui est égale à  $gh_{n+1}$  sur l'intervalle  $] -\infty, t_0]$  et à  $f_n h_{n+1}$  sur  $] t_0, t_1[$  est  $r$ -différentiable sur  $] -\infty, t_1[$  car les deux fonctions  $\tilde{g}h_{n+1}$  et  $f_n h_{n+1}$  coïncident dans un intervalle  $] t_0, t'_2[$ . En répétant la même construction pour  $t_1$ , on obtient une fonction définie sur  $R$  de rang 1 sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  et dont la restriction à  $] t_0, t_1[$  coïncide avec  $f_n h_{n+1}$ ; d'après le lemme 2, il existe une fonction  $r$ -différentiable  $\hat{f}_{n+1}$  qui prolonge  $f_n h_{n+1}$  et qui est partout de rang 1. La fonction  $f_{n+1}$  cherchée est égale à  $f_n$  sur  $\Omega_n$  et à  $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$  sur  $O_n$ .

**COROLLAIRE:** Toutes les structures différentiables sur la droite numérique  $R$  sont équivalentes.

Soit  $R$  la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et  $R'$  la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe  $C^r$ . D'après la proposition, il existe une application  $r$ -différentiable partout de rang 1 de  $R'$  sur  $R$  (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe  $C^r$  de  $R'$  sur  $R$  (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe  $C^r$ ).

## 2. LES STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN.

### 2.1. Rappel de définitions et de propriétés classiques.

**DÉFINITION 1:** Une structure feuilletée  $(F)$  sur une variété à deux dimensions  $V_2$  est définie par un atlas  $A$  de  $R^2$  sur  $V_2$  tel que si  $h_i$  et  $h_j$  sont deux cartes quelconques de  $A$ , le changement de cartes  $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$  est un homéomorphisme d'un ouvert  $U_{ji}$  de  $R^2$  sur un ouvert de  $R^2$  qui, au voisinage de tout point de  $U_{ji}$  s'exprime par des équations de la forme:

$$x' = g_{ji}(x, y) \quad y' = k_{ji}(y) \quad (1)$$

*Si les changements de cartes  $h_{ji}$  sont  $r$ -différentiables (respectivement analytiques), on dira que la structure feuilletée (F) est différentiable de classe  $C^r$  (respectivement analytique) <sup>7</sup>.*

Disons qu'une carte  $f$  de  $R^2$  dans  $V_2$  est compatible avec  $A$ , si pour toute carte  $h \in A$ , le changement de carte  $f^{-1}h$  est aussi de la forme (1) (et de plus est  $r$ -différentiable ou analytique dans le cas où (F) est une structure différentiable de classe  $C^r$  ou analytique). L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec  $A$  forme l'atlas maximal engendré par  $A$  et définissant sur  $V_2$  la structure feuilletée (F). Nous supposons dans ce qui suit que  $A$  est déjà un atlas maximal.

Soit  $U$  un ouvert de  $V_2$ . L'ensemble des cartes de  $A$  dont le but est dans  $U$  forme un atlas de  $R_2$  sur  $U$  qui définit la structure feuilletée  $(F_U)$  induite par (F) sur  $U$ .

Si (F) et (F') sont des structures feuilletées sur  $V_2$  et  $V'_2$  respectivement, définies par les atlas maximaux  $A$  et  $A'$ , un isomorphisme de (F) sur (F') est un homéomorphisme  $\psi$  de  $V_2$  sur  $V'_2$  tel que  $A' = \psi A$  (c'est-à-dire que toute carte de  $A'$  est de la forme  $\psi h$ , où  $h \in A$ ).

Dans le but  $O_i$  de chaque carte  $h_i \in A$  est définie une relation d'équivalence  $\rho_i$  dont les classes sont les images par  $h_i$  des droites  $y = \text{Cte}$ . Des relations (1) il résulte que pour tout point  $x \in O_i \cap O_j$ , les relations d'équivalence induites par  $\rho_i$  et  $\rho_j$  dans un voisinage suffisamment petit de  $x$  coïncident. Soit  $\rho$  la relation d'équivalence engendrée par les  $\rho_i$ .

**DÉFINITION 2:** *Les classes de  $\rho$  dans  $V_2$  sont appelées les feuilles de la structure feuilletée (F).*

L'espace des feuilles, c'est-à-dire l'espace quotient de  $V_2$  par la relation d'équivalence  $\rho$  (muni de la topologie quotient de celle de  $V_2$ ), jouera un rôle essentiel dans la suite.

On remarquera que la relation d'équivalence  $\rho$  est ouverte puisqu'elle est engendrée par les relations  $\rho_i$  qui sont ouvertes.

Rappelons qu'à tout champ de vecteurs  $E$  défini sur une variété  $V_2$  séparée vérifiant les deux conditions suivantes: (i)  $E$  est différentiable de classe  $C^r$  (ou analytique), (ii)  $E(z) \neq 0$

<sup>7</sup> Pour une définition générale des variétés feuilletées, voir [6].

en tout point  $z$  de  $V_2$ , est associée une structure feuilletée différentiable de classe  $C^r$  (ou analytique). Les feuilles sont alors les trajectoires du champ de vecteurs  $E$ . Réciproquement à toute structure feuilletée différentiable  $(F)$  de la classe  $C^r$  dans  $R_2$ , on peut faire correspondre un champ de vecteurs  $E$  sur  $V_2$  dont les trajectoires sont les feuilles de  $(F)$ .

*Exemple:* Les courbes qui sont solutions de l'équation différentielle (en coordonnées polaires  $r$  et  $\omega$ ):  $dr/d\omega = r(1 - r^2)$  sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique du plan privé de l'origine. Le cercle  $r = 1$  est une feuille autour de laquelle les autres feuilles s'enroulent asymptotiquement.

L'espace quotient de  $R^2 - 0$  par la relation d'équivalence  $\rho$  associée à la structure feuilletée admet dans ce cas une partition en un sous-espace ouvert homéomorphe à deux cercles et un point admettant comme seul voisinage l'espace tout entier.

**DÉFINITION 3:** Le couple  $(0_i, h_i)$  formé d'une carte  $h_i \in A$  et de son but  $0_i$  s'appelle un ouvert distingué de la structure feuilletée  $(F)$ .

Énonçons les principaux résultats relatifs aux structures feuilletées du plan. Le théorème 1 qui suit est classique; sa démonstration repose sur le théorème de Jordan (dans une version particulièrement facile à établir); elle utilise donc essentiellement le fait que le plan  $R^2$  est simplement connexe (ou plus précisément que son premier nombre de Betti modulo 2 est nul).

**THÉORÈME 1** (Poincaré [5], Bendixon [1]): Soit  $(0_i, h_i)$  un ouvert distingué d'une structure feuilletée du plan; l'image par  $h_i^{-1}$  de l'intersection de  $0_i$  avec une feuille quelconque se réduit à l'ensemble vide ou à une droite  $y = \text{Cte}$ .

**THÉORÈME 2** (Kaplan [3]): A toute structure feuilletée du plan  $R^2$  on peut associer une fonction numérique  $\psi$  définie dans  $R^2$  qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i)  $\psi$  est continue et n'admet pas de maximum ou de minimum (au sens large);
- (ii)  $\psi$  est constante sur les feuilles de la structure feuilletée.

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit  $(F)$  une structure feuilletée de classe  $C^r$  du plan  $R^2$ . Soit  $\Omega$  un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique  $\psi$  définie dans  $\Omega$  et qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i)  $\psi$  est  $r$ -différentiable et le gradient de  $\psi$  est différent de 0 en tout point de  $\Omega$ ;
- (ii)  $\psi$  est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par  $(F)$  sur  $\Omega$ .

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan  $R^2$  d'une structure feuilletée de classe  $C^\infty$  telle que toute fonction  $r$ -différentiable sur  $R^2$  et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

*Exemples de structures feuilletées du plan:*

1. Les droites  $y = Cte$  sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit  $C$  une courbe de Jordan dans le plan  $R^2$ . La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par  $C$  et qui est homéomorphe à  $R^2$  une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire  $U$  dans  $R^2$  de l'ensemble des points de coordonnées  $x = 0, y \geq 0$  est homéomorphe à  $R^2$ . Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction  $\psi = xy$  sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de  $U$ .

### 2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: *Soit  $(F)$  une structure feuilletée du plan  $R^2$ . L'espace quotient  $V$  de  $R^2$  par la relation d'équivalence  $\rho$  associée*