

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	3 (1957)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
<b>Artikel:</b>	VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN
<b>Autor:</b>	Haefliger, André / Reeb, Georges
<b>Kapitel:</b>	1.2. Variétés à une dimension simplement connexes.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-33740">https://doi.org/10.5169/seals-33740</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Ces divers exemples montrent la grande diversité des variétés à une dimension, connexes et à base dénombrable. Une classification topologique de ces espaces paraît déjà assez compliquée.

Donnons encore un exemple qui donnera une faible idée de la complexité des variétés non séparées de dimension  $> 1$ . Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux exemplaires de l'espace numérique  $R^2$  à deux dimensions rapporté à un système de coordonnées polaires  $(r, \omega)$ . Soit  $\rho$  la relation d'équivalence dans l'espace somme  $\Sigma$  de  $E_1$  et  $E_2$  qui identifie tout point de  $E_1$  de coordonnées  $(r, \omega)$ ,  $r < 1$ , avec le point de  $E_2$  de coordonnées  $(r, \omega/1 - r)$  et qui se réduit à l'identité pour les autres points. L'espace quotient  $\Sigma/\rho$  est une variété à deux dimensions; l'image dans  $\Sigma/\rho$  de tout point de  $E_1$  de coordonnées  $(1, \omega_0)$  n'est séparée d'aucun point de l'image dans  $\Sigma/\rho$  du cercle  $r = 1$  de  $E_2$ .

#### 1.2. Variétés à une dimension simplement connexes.

Rappelons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1: *Le couple  $(\tilde{V}, p)$  formé d'un espace topologique  $\tilde{V}$  et d'une application continue  $p$  de  $\tilde{V}$  sur un espace topologique  $V$  est appelé un revêtement de  $V$ , si tout point de  $V$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que  $p^{-1}(U)$  admette une partition en sous-ensembles ouverts  $U_i$  tels que la restriction de  $p$  à chacun d'eux soit un homéomorphisme sur  $U$ .*

Un espace topologique  $V$  sera dit *simplement connexe*, s'il est connexe et si pour tout revêtement connexe  $(\tilde{V}, p)$  de  $V$ , la projection  $p$  est un homéomorphisme de  $\tilde{V}$  sur  $V$ .

DÉFINITION 2: *Une variété à  $n$  dimensions  $V_n$  est dite orientable, s'il existe un atlas  $A$  de  $R^n$  sur  $V_n$  tel que tout changement de cartes associé à deux cartes de  $A$  soit un homéomorphisme direct (c'est-à-dire qui conserve l'orientation) d'un ouvert de  $R^n$  sur un ouvert de  $R^n$ .*

Les variétés construites dans les exemples 2 et 3 (pour  $n$  impair) ne sont pas orientables.

Si une variété  $V$  à une dimension peut être étalée dans la droite numérique  $R$ , alors  $V$  est nécessairement orientable. Par

contre, une variété à une dimension orientable ne peut pas toujours être étalée dans  $\mathbb{R}$ : il suffit de considérer le cas du cercle. Cependant, il est possible de démontrer la proposition suivante, qui sera utile par la suite.

**PROPOSITION 1.** *Soit  $V$  une variété à une dimension simplement connexe et à base dénombrable. Il existe alors une application continue  $f$  qui étale  $V$  dans la droite numérique.*

Nous utiliserons dans la démonstration le lemme suivant:

**LEMME:** *Si une variété  $V$  à une dimension est simplement connexe, le complémentaire d'un point quelconque  $x$  de  $V$  a deux composantes connexes.*

En effet, soit  $U$  un voisinage de  $x$  homéomorphe à un intervalle; le complémentaire de  $x$  dans  $U$  a deux composantes connexes  $U_+$  et  $U_-$ . Considérons alors deux exemplaires  $V'$  et  $V''$  du complémentaire de  $x$  dans  $V$  et soient  $U'_+$ ,  $U'_-$  et  $U''_+$ ,  $U''_-$  les correspondants de  $U_+$ ,  $U_-$  dans  $V'$  et  $V''$ . Complétons l'espace somme  $V' + V''$  par deux points  $x'$  et  $x''$  admettant respectivement des voisinages  $U'$  et  $U''$  tel que  $U' \cap V' = U'_+$ ,  $U' \cap V'' = U''_-$  et  $U'' \cap V' = U'_-$ ,  $U'' \cap V'' = U''_+$ ; on obtient ainsi un espace  $V$  qui, muni de sa projection naturelle  $p$  sur  $V$  (en particulier  $p(x') = p(x'') = x$ ), est un revêtement à deux feuillets de  $V$ . Si le complémentaire de  $x$  dans  $V$  était connexe,  $V$  serait aussi connexe, ce qui est impossible puisque  $V$  est simplement connexe.

On peut montrer que réciproquement, si le complémentaire de tout point de  $V$  n'est pas connexe, alors  $V$  est simplement connexe.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Il est possible de trouver une famille dénombrable de cartes  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de  $\mathbb{R}$  dans  $V$  dont les buts  $0_i$  recouvrent  $V$ . Comme  $V$  est connexe, on peut supposer que la numérotation des  $0_i$  est faite de telle façon que  $\Omega_n = U_{i=1, 2, \dots, n} 0_i$  soit connexe, quel que soit l'entier  $n$ . Nous raisonnons par récurrence. Supposons définie sur  $\Omega_n$  une application continue  $f_n$  qui étale  $\Omega_n$  dans l'intervalle  $[-n, +n]$ . Nous allons montrer que  $f_n$  peut être prolongée suivant une application  $f_{n+1}$  qui étale  $\Omega_{n+1}$  dans l'intervalle  $[-n-1, n+1]$ .

Il résulte du lemme que  $\Omega_n \cap 0_{n+1}$  est connexe, car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point  $x$  tel que le complémentaire de  $x$  dans  $V$  soit connexe. Donc  $h_{n+1}^{-1}(\Omega_n \cap 0_{n+1}) = I$  est un intervalle ouvert de  $R$  et l'application  $f_n h_{n+1}$  est une fonction continue, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à  $n$ ; elle peut être prolongée en une fonction  $\varphi$  continue sur  $R$ , strictement monotone et inférieure en valeur absolue à  $n+1$ . L'application  $\varphi h^{-1}$  définie sur  $0_{n+1}$  et l'application  $f_n$  coïncident sur  $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ ; leur réunion définit le prolongement cherché  $f_{n+1}$ .

### 1.3. Variétés munies de structures différentiables.

**DÉFINITION 1:** Une structure différentiable de classe  $C^r$ ,  $r$  étant un entier positif ou  $\infty$  (respectivement une structure analytique), sur une variété à  $n$  dimensions  $V_n$  est définie par la donnée d'un atlas  $A$  de  $R^n$  sur  $V_n$  tel que, pour tout couple de cartes  $h_i, h_j \in A$ , le changement de cartes  $h_j^{-1} h_i$  soit un homéomorphisme  $r$  fois continûment différentiable (respectivement analytique) d'un ouvert de  $R^n$  dans  $R^n$ .

Une *fonction r-différentiable* sur  $V_n$  est une application  $f$  de  $V_n$  dans la droite numérique  $R$  telle que, pour toute carte  $h_i \in A$ , l'application  $fh_i$  soit une fonction  $r$  fois continûment différentiable sur  $R^n$ . Une fonction  $r$ -différentiable sur  $V_n$  est dite de *rang 1* au point  $x \in V_n$ , si pour une carte  $h_i$  dont le but contient  $x$ , l'application  $fh_i$  est une fonction dont au moins une dérivée partielle au point  $h_i^{-1}(x)$  est différente de zéro; cette définition est évidemment indépendante de la carte choisie  $h_i \in A$ .

On définirait de même la notion d'applications  $r$  différentiables d'une variété  $V_n$  différentiable de classe  $C^r$  dans une variété différentiable  $V_m$  de classe  $C^r$ .

Une carte  $f$  de  $R^n$  dans  $V_n$  sera dite compatible avec l'atlas  $A$ , si pour tout  $h \in A$ , les changements de cartes  $f^{-1}h$  et  $h^{-1}f$  sont des homéomorphismes  $r$ -différentiables (ou analytiques) d'ouverts de  $R^n$  dans  $R^n$ . L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec  $A$  forme l'atlas maximal  $\bar{A}$  engendré par  $A$ . Deux sous-atlas de  $\bar{A}$  définissent sur  $V_n$  la même structure de variété  $r$ -différentiable de classe  $C^r$  (ou analytique).