Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

Autor: Haefliger, André / Reeb, Georges

Kapitel: Introduction.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33740

VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

PAR

André HAEFLIGER, Paris et Georges REEB, Grenoble

INTRODUCTION.

La notion de variété topologique séparée [1] est fondamentale dans plusieurs branches des mathématiques. Rappelons-en la définition:

> Une variété topologique séparée à n dimensions est un espace topologique V_n satisfaisant aux deux conditions suivantes:
>
> (i) Tout point de V_n admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à n dimensions R^n,
>
> (ii) V_n est un espace topologique séparé au sens de Hausdorff, c'est-à-dire que deux points quelconques de V_n admettent des voisinages sans points communs.

La commodité de la condition (ii) apparaît dans l'étude de certaines propriétés de géométrie différentielle et de topologie. Par exemple, une variété séparée V_n à n dimensions et à base dénombrable est métrisable; il en résulte qu'elle est homéomorphe à un sous-espace d'un espace numérique de dimension assez élevée. Toute variété séparée connexe à une dimension et à base dénombrable est homéomorphe soit à l'espace numérique à une dimension R, soit au cercle.

Cependant, il semble utile d'étudier également les variétés topologiques qui ne satisfont pas nécessairement l'axiome de

[1] Habituellement on dit variété topologique au lieu de variété topologique séparée.

séparation de Hausdorff. Ces espaces s'introduisent en effet d'une manière naturelle dans plusieurs questions [2]. Le but de notre article est de montrer comment l'étude des variétés à une dimension (en général non séparées) permet de retrouver plusieurs propriétés des feuilletages du plan.

La première partie est consacrée à l'étude des variétés non séparées (plus particulièrement des variétés à une dimension). Après avoir donné quelques définitions et des exemples (1.1), nous établissons quelques propriétés des variétés à une dimension simplement connexes (1.2) et des structures différentiables qu'on peut y définir (1.3). Ces propriétés seront appliquées dans la seconde partie.

Les structures feuilletées du plan ont été étudiées par Poincaré et de nombreux auteurs. Les définitions fondamentales et les principaux résultats ont été rassemblés en 2.1. Les théorèmes 2, 3 et 4, dus à Kaplan, Kamke et Wazewsky, deviennent particulièrement clairs à notre sens si l'on part de la remarque fondamentale suivante: l'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan est une variété à une dimension (en général non séparée) (2.2). Ces théorèmes sont démontrés en 2.3.

1. Propriétés des variétés a une dimension.

1.1. *Définitions et exemples.*

Définition 1: *Une variété topologique à* n *dimensions* V_n *est un espace topologique dont chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à* n *dimensions* R^n.

On appelle *carte* de R^n dans V_n un homéomorphisme h de R^n sur un ouvert U de V_n; l'ouvert U est le *but* de la carte h. Le changement de cartes associé à deux cartes h_i et h_j de R^n dans V_n de buts respectifs U_i et U_j est l'homéomorphisme $h_j^{-1} h_i$ [3] de l'ouvert $h_i^{-1} (U_i \cap U_j)$ de R^n sur l'ouvert $h_j^{-1} (U_i \cap U_j)$. D'après la définition précédente, il existe toujours un ensemble de cartes

[2] Par exemple, un faisceau défini sur une variété séparée est muni d'une structure de variété en général non séparée.

[3] Si f est une application d'une partie A d'un ensemble E dans un ensemble E′ et f' une application d'une partie A′ de E′ dans un ensemble E″, on désignera par $f' f$ l'application $x \to f' [f(x)]$ de la partie de E formée des points x tels que $f(x) \in A'$.