

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN
Autor: Haefliger, André / Reeb, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

PAR

André HAEFLIGER, Paris et Georges REEB, Grenoble

INTRODUCTION.

La notion de variété topologique séparée¹ est fondamentale dans plusieurs branches des mathématiques. Rappelons-en la définition:

Une variété topologique séparée à n dimensions est un espace topologique V_n satisfaisant aux deux conditions suivantes:

- (i) Tout point de V_n admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à n dimensions \mathbb{R}^n ,
- (ii) V_n est un espace topologique séparé au sens de Hausdorff, c'est-à-dire que deux points quelconques de V_n admettent des voisinages sans points communs.

La commodité de la condition (ii) apparaît dans l'étude de certaines propriétés de géométrie différentielle et de topologie. Par exemple, une variété séparée V_n à n dimensions et à base dénombrable est métrisable; il en résulte qu'elle est homéomorphe à un sous-espace d'un espace numérique de dimension assez élevée. Toute variété séparée connexe à une dimension et à base dénombrable est homéomorphe soit à l'espace numérique à une dimension \mathbb{R} , soit au cercle.

Cependant, il semble utile d'étudier également les variétés topologiques qui ne satisfont pas nécessairement l'axiome de

¹ Habituellement on dit variété topologique au lieu de variété topologique séparée.

séparation de Hausdorff. Ces espaces s'introduisent en effet d'une manière naturelle dans plusieurs questions². Le but de notre article est de montrer comment l'étude des variétés à une dimension (en général non séparées) permet de retrouver plusieurs propriétés des feuilletages du plan.

La première partie est consacrée à l'étude des variétés non séparées (plus particulièrement des variétés à une dimension). Après avoir donné quelques définitions et des exemples (1.1), nous établissons quelques propriétés des variétés à une dimension simplement connexes (1.2) et des structures différentiables qu'on peut y définir (1.3). Ces propriétés seront appliquées dans la seconde partie.

Les structures feuilletées du plan ont été étudiées par Poincaré et de nombreux auteurs. Les définitions fondamentales et les principaux résultats ont été rassemblés en 2.1. Les théorèmes 2, 3 et 4, dus à Kaplan, Kamke et Wazewsky, deviennent particulièrement clairs à notre sens si l'on part de la remarque fondamentale suivante: l'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan est une variété à une dimension (en général non séparée) (2.2): Ces théorèmes sont démontrés en 2.3.

1. PROPRIÉTÉS DES VARIÉTÉS A UNE DIMENSION.

1.1. Définitions et exemples.

DÉFINITION 1: Une variété topologique à n dimensions V_n est un espace topologique dont chaque point admet un voisinage ouvert homéomorphe à l'espace numérique à n dimensions R^n .

On appelle *carte* de R^n dans V_n un homéomorphisme h de R^n sur un ouvert U de V_n ; l'ouvert U est le *but* de la carte h . Le changement de cartes associé à deux cartes h_i et h_j de R^n dans V_n de buts respectifs U_i et U_j est l'homéomorphisme $h_j^{-1} h_i$ ³ de l'ouvert $h_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ de R^n sur l'ouvert $h_j^{-1}(U_i \cap U_j)$. D'après la définition précédente, il existe toujours un ensemble de cartes

² Par exemple, un faisceau défini sur une variété séparée est muni d'une structure de variété en général non séparée.

³ Si f est une application d'une partie A d'un ensemble E dans un ensemble E' et f' une application d'une partie A' de E' dans un ensemble E'' , on désignera par $f'f$ l'application $x \rightarrow f'[f(x)]$ de la partie de E formée des points x tels que $f(x) \in A'$.

dont les buts recouvrent V_n ; un tel ensemble sera appelé un *atlas* de \mathbb{R}^n sur V_n ⁴.

Les variétés topologiques séparées sont souvent munies de structures supplémentaires: orientation, structure différentiable, structure complexe... Ces notions (ainsi que celles, par exemple, de vecteur tangent ou de tenseur) sont définies sans faire appel à l'axiome de séparation; elles se transposent donc immédiatement aux variétés non séparées.

Un procédé de construction général.

DÉFINITION 2: *On dit qu'une application continue p d'un espace topologique E dans un espace topologique E' étale E dans E' , si tout point x de E admet un voisinage ouvert U tel que la restriction de p à U soit un homéomorphisme sur un ouvert de E' .*

PROPOSITION 1: *Soit V_n une variété à n dimensions et soit ρ une relation d'équivalence ouverte dans V_n telle que la restriction de ρ à un voisinage suffisamment petit de tout point x de V_n se réduise à l'identité. L'espace topologique quotient $V'_n = V_n/\rho$ de V_n par la relation d'équivalence ρ est une variété à n dimensions et l'application canonique p de V_n sur V_n/ρ étale V_n sur V'_n .*

En effet, si U est un voisinage ouvert de x tel que la restriction de ρ à U soit l'identité, la restriction de p à U est un homéomorphisme de U sur un ouvert U' de V'_n ; chaque point de V_n admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n , il en sera donc de même pour chaque point de V'_n .

Remarquons que si V_n est une variété séparée, en général il n'en sera pas de même pour V'_n , comme le montreront les exemples qui suivent.

Le procédé de construction des variétés donné par la proposition 1 est général dans le sens suivant: Etant donnée une variété à n dimensions V_n , il existe une famille de cartes h_i de \mathbb{R}^n dans V_n dont les buts recouvrent V_n (i parcourant un ensemble d'indices I); la variété V_n est donc isomorphe au quotient de l'espace somme $I \times \mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence associée à l'application $(i, x) \rightarrow h_i(x)$ de $I \times \mathbb{R}^n$ sur V_n .

⁴ Nous utilisons ici la terminologie et les définitions de C. Ehresmann.

DÉFINITION 3: Un point x d'une variété V_n est appelé un point de branchement s'il existe un point z de V_n ($z \neq x$) qui n'est pas séparé de x , c'est-à-dire que tout voisinage de x rencontre tout voisinage de z .

On remarquera que la relation « x n'est pas séparé de z » est symétrique et réflexive, mais qu'elle n'est pas transitive en général (cf. exemple 3 ci-dessous).

Exemples.

La proposition 1 permet la construction d'une multitude d'exemples de variétés. Nous limitant maintenant aux variétés à une dimension et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité, nous allons étudier quelques exemples importants.

EXEMPLE 1. Soient R_1 et R_2 deux exemplaires de la droite numérique réelle R et soit Σ la somme topologique de R_1 et R_2 . Considérons un ouvert Ω de R ; la relation d'équivalence ρ dans Σ qui identifie les points de R_1 et R_2 de même abscisse $t \in \Omega$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points satisfait à la condition de la proposition 1. En passant au quotient, on obtient une variété à une dimension V . Les points de branchement sont ceux dont l'abscisse est un point frontière de Ω ⁵. Il est utile d'indiquer quelques cas particuliers:

- a) *le branchement simple*: ici Ω est l'ensemble $t < 0$. Les points de branchement sont ceux d'abscisse 0;
- b) *le lasso*: Ω est l'ensemble $t > 0$ et $t < -1$. Les points de branchement sont les points d'abscisse 0 et -1 ;
- c) *le lasso étranglé*: Ω est l'ensemble $t \neq 0$. Les points de branchement ont l'abscisse 0;
- d) Ω est le complémentaire de l'ensemble parfait de Cantor. Ici l'ensemble des points de branchement a la puissance du continu.

EXEMPLE 2. *La boucle*: Soit ρ la relation d'équivalence dans la droite numérique R qui identifie les points d'abscisse t et $-t$ pour $|t| < 1$ et qui se réduit à l'identité pour les autres

⁵ L'abscisse du point x de Σ/ρ est l'abscisse des points de Σ qui sont projetés sur x par l'application canonique de Σ sur Σ/ρ .

points. L'espace quotient est la boucle et les points de branchement sont les points 1 et -1 .

EXEMPLE 3. *L'étoile*: Soit Σ la somme topologique de n exemplaires R_1, R_2, \dots, R_n de la droite numérique. Soit ρ la relation d'équivalence dans Σ qui identifie chaque point d'abscisse $t > 0$ de R_i avec le point d'abscisse $-t$ de R_{i+1} ($1 \leq i \leq n$; on posera $R_{n+1} = R_1$). L'espace quotient est une variété à une dimension qui peut être appelée une étoile à n branches. Les points de branchement sont ici les points d'abscisse 0; deux tels points appartenant à R_i et R_j sont séparés si et seulement si $i - j \neq 1$. On pourrait considérer également une étoile avec une infinité de branches.

EXEMPLE 4. *La plume*: L'exemple 1 a) montre comment il est possible de « greffer » au point $t = 0$ d'une droite R un branchement simple; on peut évidemment greffer un tel branchement en un point quelconque de R . Si en tous les points de coordonnées rationnelles de R , on greffe simultanément un branchement simple — il est inutile de décrire ce procédé en détail — on obtient une variété à une dimension qui mérite le nom de plume; la droite R est la *tige* sur laquelle sont greffées les *barbes*. Ici les points de branchement forment un ensemble partout dense dans R .

En greffant une barbe en chaque point de R , on obtiendrait une variété à une dimension qui n'est pas à base dénombrable.

EXEMPLE 5. *La plume composée*: Si dans une plume, on remplace chaque barbe par une nouvelle plume, on définit ainsi une variété à une dimension, que nous appellerons *plume double*. Dans une plume double on peut remplacer chaque barbe par une plume simple, obtenant ainsi une plume *triple*; en réitérant ce processus n fois (n entier) on obtient la plume *n -uple*. Rien n'empêche d'effectuer une suite dénombrable de ces opérations pour obtenir la variété à une dimension qui mérite le nom de plume *composée* (ou plume complète). La plume composée possède la propriété remarquable suivante: l'ensemble des points de branchement, qui est dénombrable, est partout dense dans l'espace envisagé.

Ces divers exemples montrent la grande diversité des variétés à une dimension, connexes et à base dénombrable. Une classification topologique de ces espaces paraît déjà assez compliquée.

Donnons encore un exemple qui donnera une faible idée de la complexité des variétés non séparées de dimension > 1 . Soient E_1 et E_2 deux exemplaires de l'espace numérique \mathbb{R}^2 à deux dimensions rapporté à un système de coordonnées polaires (r, ω) . Soit ρ la relation d'équivalence dans l'espace somme Σ de E_1 et E_2 qui identifie tout point de E_1 de coordonnées (r, ω) , $r < 1$, avec le point de E_2 de coordonnées $(r, \omega/1 - r)$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points. L'espace quotient Σ/ρ est une variété à deux dimensions; l'image dans Σ/ρ de tout point de E_1 de coordonnées $(1, \omega_0)$ n'est séparée d'aucun point de l'image dans Σ/ρ du cercle $r = 1$ de E_2 .

1.2. Variétés à une dimension simplement connexes.

Rappelons les définitions suivantes:

DÉFINITION 1: *Le couple (\tilde{V}, p) formé d'un espace topologique \tilde{V} et d'une application continue p de \tilde{V} sur un espace topologique V est appelé un revêtement de V , si tout point de V possède un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ admette une partition en sous-ensembles ouverts U_i tels que la restriction de p à chacun d'eux soit un homéomorphisme sur U .*

Un espace topologique V sera dit *simplement connexe*, s'il est connexe et si pour tout revêtement connexe (\tilde{V}, p) de V , la projection p est un homéomorphisme de \tilde{V} sur V .

DÉFINITION 2: *Une variété à n dimensions V_n est dite orientable, s'il existe un atlas A de \mathbb{R}^n sur V_n tel que tout changement de cartes associé à deux cartes de A soit un homéomorphisme direct (c'est-à-dire qui conserve l'orientation) d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur un ouvert de \mathbb{R}^n .*

Les variétés construites dans les exemples 2 et 3 (pour n impair) ne sont pas orientables.

Si une variété V à une dimension peut être étalée dans la droite numérique \mathbb{R} , alors V est nécessairement orientable. Par

contre, une variété à une dimension orientable ne peut pas toujours être étalée dans \mathbb{R} : il suffit de considérer le cas du cercle. Cependant, il est possible de démontrer la proposition suivante, qui sera utile par la suite.

PROPOSITION 1. *Soit V une variété à une dimension simplement connexe et à base dénombrable. Il existe alors une application continue f qui étale V dans la droite numérique.*

Nous utiliserons dans la démonstration le lemme suivant:

LEMME: *Si une variété V à une dimension est simplement connexe, le complémentaire d'un point quelconque x de V a deux composantes connexes.*

En effet, soit U un voisinage de x homéomorphe à un intervalle; le complémentaire de x dans U a deux composantes connexes U_+ et U_- . Considérons alors deux exemplaires V' et V'' du complémentaire de x dans V et soient U'_+ , U'_- et U''_+ , U''_- les correspondants de U_+ , U_- dans V' et V'' . Complétons l'espace somme $V' + V''$ par deux points x' et x'' admettant respectivement des voisinages U' et U'' tel que $U' \cap V' = U'_+$, $U' \cap V'' = U''_-$ et $U'' \cap V' = U'_-$, $U'' \cap V'' = U''_+$; on obtient ainsi un espace V qui, muni de sa projection naturelle p sur V (en particulier $p(x') = p(x'') = x$), est un revêtement à deux feuillets de V . Si le complémentaire de x dans V était connexe, V serait aussi connexe, ce qui est impossible puisque V est simplement connexe.

On peut montrer que réciproquement, si le complémentaire de tout point de V n'est pas connexe, alors V est simplement connexe.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Il est possible de trouver une famille dénombrable de cartes h_i ($i = 1, 2, \dots$) de \mathbb{R} dans V dont les buts O_i recouvrent V . Comme V est connexe, on peut supposer que la numérotation des O_i est faite de telle façon que $\Omega_n = \bigcup_{i=1, 2, \dots, n} O_i$ soit connexe, quel que soit l'entier n . Nous raisonnerons par récurrence. Supposons définie sur Ω_n une application continue f_n qui étale Ω_n dans l'intervalle $] -n, +n [$. Nous allons montrer que f_n peut être prolongée suivant une application f_{n+1} qui étale Ω_{n+1} dans l'intervalle $] -n - 1, n + 1 [$.

Il résulte du lemme que $\Omega_n \cap O_{n+1}$ est connexe, car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point x tel que le complémentaire de x dans V soit connexe. Donc $h_{n+1}^{-1}(\Omega_n \cap O_{n+1}) = I$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et l'application $f_n h_{n+1}$ est une fonction continue, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à n ; elle peut être prolongée en une fonction φ continue sur \mathbb{R} , strictement monotone et inférieure en valeur absolue à $n + 1$. L'application φh^{-1} définie sur O_{n+1} et l'application f_n coïncident sur $\Omega_n \cap O_{n+1}$; leur réunion définit le prolongement cherché f_{n+1} .

1.3. Variétés munies de structures différentiables.

DÉFINITION 1: Une structure différentiable de classe C^r , r étant un entier positif ou ∞ (respectivement une structure analytique), sur une variété à n dimensions V_n est définie par la donnée d'un atlas A de \mathbb{R}^n sur V_n tel que, pour tout couple de cartes $h_i, h_j \in A$, le changement de cartes $h_j^{-1} h_i$ soit un homéomorphisme r fois continûment différentiable (respectivement analytique) d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n .

Une fonction r -différentiable sur V_n est une application f de V_n dans la droite numérique \mathbb{R} telle que, pour toute carte $h_i \in A$, l'application $f h_i$ soit une fonction r fois continûment différentiable sur \mathbb{R}^n . Une fonction r -différentiable sur V_n est dite de *rang 1* au point $x \in V_n$, si pour une carte h_i dont le but contient x , l'application $f h_i$ est une fonction dont au moins une dérivée partielle au point $h_i^{-1}(x)$ est différente de zéro; cette définition est évidemment indépendante de la carte choisie $h_i \in A$.

On définirait de même la notion d'applications r différentiables d'une variété V_n différentiable de classe C^r dans une variété différentiable V_m de classe C^r .

Une carte f de \mathbb{R}^n dans V_n sera dite compatible avec l'atlas A , si pour tout $h \in A$, les changements de cartes $f^{-1} h$ et $h^{-1} f$ sont des homéomorphismes r -différentiables (ou analytiques) d'ouverts de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal \bar{A} engendré par A . Deux sous-atlas de \bar{A} définissent sur V_n la même structure de variété r -différentiable de classe C^r (ou analytique).

PROPRIÉTÉ 1: Le branchement simple (exemple 1 a)) [de même que le lasso étranglé] est une variété à une dimension susceptible de deux structures de variétés différentiables de classe C^∞ non isomorphes.

Autrement dit, on peut munir le branchement simple de deux structures différentiables de classe C^∞ telles qu'il n'existe aucun homéomorphisme de classe C^∞ (ainsi que son inverse) de V muni de la première structure sur V muni de la seconde.

En reprenant les notations de l'exemple 1, R_1 et R_2 (identifiés à leurs images dans V) sont deux ouverts formant un recouvrement de V , le point de R_1 (respectivement R_2) d'abscisse t étant désigné par t_1 (respectivement t_2). On peut définir une structure différentiable de classe C^∞ sur V en se donnant deux cartes h_1 et h_2 de \mathbb{R} sur R_1 et R_2 telles que $h_1^{-1} h_2$ et $h_2^{-1} h_1$ soient des homéomorphismes ∞ -différentiables de la demi-droite $] - \infty, 0 [$.

Première structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2$.

Deuxième structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2^3$.

Pour la première structure, la fonction qui au point t_1 ou t_2 prend la valeur t est une fonction ∞ -différentiable sur V partout de rang 1. Par contre, pour la deuxième structure, toute fonction ∞ -différentiable f sur V est de rang 0 au point $t = 0$. En effet, soient $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$; de $f_1(t) = f_2 h_2^{-1} h_1(t)$ résulte $\left(\frac{d}{dt} f_1(t)\right)_{t=0} = 0$. Cette dernière circonstance établit la propriété 1⁶. Remarquons que les deux structures définies ci-dessus sont même analytiques.

Il est clair qu'on pourrait multiplier les exemples. On comprendra facilement à partir de l'exemple précédent comment construire une structure différentiable de classe C^∞ sur une plume composée qui mette en évidence la propriété suivante:

⁶ Dans un article récent [4], Milnor a construit deux structures différentiables non isomorphes sur la sphère S^7 . Le résultat de Milnor est global; il s'agit ici au contraire d'une propriété locale, relative à un voisinage arbitraire d'un couple de points non séparés.

PROPRIÉTÉ 2: Il existe des variétés à une dimension (par exemple: la plume composée) susceptibles d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toutes les fonctions continûment différentiables sur ces variétés se réduisent à des constantes.

Les propriétés pathologiques mises en évidence ci-dessus conduisent à une notion de structure différentiable plus stricte pour laquelle les propriétés précédentes ne soient plus valables.

DÉFINITION 2: Une structure différentiable de classe C^r sur une variété V_n est dite *régulière* si pour toute fonction r -différentiable définie sur un voisinage de $x \in V_n$, il existe une fonction r -différentiable f' définie sur V_n telle que f et f' coïncident sur un voisinage de x .

Toute structure différentiable de classe C^r sur une variété *séparée* V_n est régulière. La deuxième structure différentiable définie sur le branchement simple n'est pas régulière.

Nous utiliserons dans la démonstration de la proposition 1 ci-dessous le

LEMME: Soit V une variété munie d'une structure différentiable régulière de classe C^r . Si une fonction r -différentiable f sur V est de rang 1 en un point x de V , elle est également de rang 1 en tout point y non séparé de x .

Pour simplifier les notations, nous démontrerons ce lemme dans le cas où V est une variété à une dimension. Soient h_1 et h_2 deux cartes de R dans V telles que $h_1(0) = x$ et $h_2(0) = y$. L'application $h = h_2^{-1} h_1$ est un homéomorphisme r -différentiable, ainsi que son inverse, d'un ouvert U_1 de R sur un ouvert U_2 de R , l'origine 0 appartenant à l'adhérence de U_1 et U_2 ; les fonctions $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$ sont r -différentiables dans R et la dérivée $f'_1(0)$ de f_1 à l'origine n'est pas nulle. Soit $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ une suite de points de U_1 tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$; en posant $\bar{t}_n = h(t_n)$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{t}_n = 0$. Comme $f'_1(t_n) = f'_2(\bar{t}_n) h'(t_n)$ pour tout n , si la $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_2(\bar{t}_n) = f'_2(0)$ était nulle, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} h'(t_n)$ serait infinie; mais alors si g est une fonction r -différentiable sur V et de rang 1 en y (une telle fonction existe toujours en vertu de l'hypothèse

de régularité), avec les notations correspondantes, $\lim_{n \rightarrow \infty} g'_1(t_n)$ serait infinie, ce qui est impossible. Donc $f'_2(0) \neq 0$.

La proposition 1 de 1.2 peut être précisée de la manière suivante:

PROPOSITION 1: *Sur toute variété à une dimension V munie d'une structure différentiable régulière de classe C^r , simplement connexe et à base dénombrable, il existe une fonction r -différentiable f partout de rang 1.*

Autrement dit, la variété V peut être étalée dans R par une application r -différentiable f partout de rang 1.

Nous supposons connu le lemme suivant:

LEMME: Soit $f(t)$ une fonction r -différentiable définie sur un ouvert I' de la droite numérique R et dont la dérivée est différente de zéro en tout point d'un intervalle fermé $I < I'$; la restriction de f à I peut se prolonger suivant une fonction r -différentiable sur R et de dérivée non nulle en tout point de R .

Soit A l'atlas de R sur V qui définit la structure différentiable de classe C^r sur V . La marche générale de la démonstration est celle de la proposition 1 de 1.2. Reprenons les mêmes notations en supposant cette fois que chaque O_i est l'image de l'intervalle $I:]-1, +1[$ par un homéomorphisme h_i qui se prolonge suivant un homéomorphisme $\tilde{h}_i \in A$ de R dans V . On suppose définie sur Ω_n une fonction r -différentiable f_n partout de rang 1 et telle que pour tout O_i , $1 \leq i \leq n$, la fonction $f_n h_i$ qui est définie sur I se prolonge suivant une fonction r -différentiable sur R partout de rang 1. On va montrer que f_n peut se prolonger suivant une fonction r -différentiable f_{n+1} sur Ω_{n+1} jouissant des mêmes propriétés.

Comme $\Omega_n \cap O_{n+1}$ est connexe, $f_n h_{n+1}$ est une fonction r -différentiable sur un intervalle $]t_0, t_1[$ contenu dans I et à dérivée non nulle. Les ensembles $h_{n+1}^{-1}(O_i)$, $1 \leq i \leq n$ sont des intervalles ouverts qui recouvrent $]t_0, t_1[$; soit O_k un ouvert tel que $h_{n+1}^{-1}(O_k)$ soit un intervalle de la forme $]t_0, t_2[$, ($t_2 \leq t_1$). Par l'hypothèse de récurrence, la fonction $f_n h_k$ se prolonge sur R suivant une fonction \hat{f}_k partout de rang 1. Soit t'_0 le point de

l'intervalle $[-1, +1]$ défini par $t'_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} h_k^{-1} h_{n+1}(t)$ et soit $x' = \tilde{h}_k(t'_0)$; le point $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$ n'est pas séparé de x' . Il existe une fonction r -différentiable g dans V qui coïncide avec $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$ sur un voisinage de x' ; comme g est de rang 1 en x' , elle l'est également en x (lemme 1). La fonction qui est égale à gh_{n+1} sur l'intervalle $] -\infty, t_0]$ et à $f_n h_{n+1}$ sur $] t_0, t_1[$ est r -différentiable sur $] -\infty, t_1[$ car les deux fonctions $\tilde{g}h_{n+1}$ et $f_n h_{n+1}$ coïncident dans un intervalle $] t_0, t'_2[$. En répétant la même construction pour t_1 , on obtient une fonction définie sur R de rang 1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et dont la restriction à $] t_0, t_1[$ coïncide avec $f_n h_{n+1}$; d'après le lemme 2, il existe une fonction r -différentiable \hat{f}_{n+1} qui prolonge $f_n h_{n+1}$ et qui est partout de rang 1. La fonction f_{n+1} cherchée est égale à f_n sur Ω_n et à $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$ sur O_n .

COROLLAIRE: Toutes les structures différentiables sur la droite numérique R sont équivalentes.

Soit R la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et R' la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe C^r . D'après la proposition, il existe une application r -différentiable partout de rang 1 de R' sur R (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe C^r de R' sur R (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe C^r).

2. LES STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN.

2.1. Rappel de définitions et de propriétés classiques.

DÉFINITION 1: Une structure feuilletée (F) sur une variété à deux dimensions V_2 est définie par un atlas A de R^2 sur V_2 tel que si h_i et h_j sont deux cartes quelconques de A , le changement de cartes $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$ est un homéomorphisme d'un ouvert U_{ji} de R^2 sur un ouvert de R^2 qui, au voisinage de tout point de U_{ji} s'exprime par des équations de la forme:

$$x' = g_{ji}(x, y) \quad y' = k_{ji}(y) \quad (1)$$

Si les changements de cartes h_{ji} sont r -différentiables (respectivement analytiques), on dira que la structure feuilletée (F) est différentiable de classe C^r (respectivement analytique) ⁷.

Disons qu'une carte f de R^2 dans V_2 est compatible avec A , si pour toute carte $h \in A$, le changement de carte $f^{-1}h$ est aussi de la forme (1) (et de plus est r -différentiable ou analytique dans le cas où (F) est une structure différentiable de classe C^r ou analytique). L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal engendré par A et définissant sur V_2 la structure feuilletée (F). Nous supposons dans ce qui suit que A est déjà un atlas maximal.

Soit U un ouvert de V_2 . L'ensemble des cartes de A dont le but est dans U forme un atlas de R_2 sur U qui définit la structure feuilletée (F_U) induite par (F) sur U .

Si (F) et (F') sont des structures feuilletées sur V_2 et V'_2 respectivement, définies par les atlas maximaux A et A' , un isomorphisme de (F) sur (F') est un homéomorphisme ψ de V_2 sur V'_2 tel que $A' = \psi A$ (c'est-à-dire que toute carte de A' est de la forme ψh , où $h \in A$).

Dans le but O_i de chaque carte $h_i \in A$ est définie une relation d'équivalence ρ_i dont les classes sont les images par h_i des droites $y = \text{Cte}$. Des relations (1) il résulte que pour tout point $x \in O_i \cap O_j$, les relations d'équivalence induites par ρ_i et ρ_j dans un voisinage suffisamment petit de x coïncident. Soit ρ la relation d'équivalence engendrée par les ρ_i .

DÉFINITION 2: *Les classes de ρ dans V_2 sont appelées les feuilles de la structure feuilletée (F).*

L'espace des feuilles, c'est-à-dire l'espace quotient de V_2 par la relation d'équivalence ρ (muni de la topologie quotient de celle de V_2), jouera un rôle essentiel dans la suite.

On remarquera que la relation d'équivalence ρ est ouverte puisqu'elle est engendrée par les relations ρ_i qui sont ouvertes.

Rappelons qu'à tout champ de vecteurs E défini sur une variété V_2 séparée vérifiant les deux conditions suivantes: (i) E est différentiable de classe C^r (ou analytique), (ii) $E(z) \neq 0$

⁷ Pour une définition générale des variétés feuilletées, voir [6].

en tout point z de V_2 , est associée une structure feuilletée différentiable de classe C^r (ou analytique). Les feuilles sont alors les trajectoires du champ de vecteurs E . Réciproquement à toute structure feuilletée différentiable (F) de la classe C^r dans R_2 , on peut faire correspondre un champ de vecteurs E sur V_2 dont les trajectoires sont les feuilles de (F) .

Exemple: Les courbes qui sont solutions de l'équation différentielle (en coordonnées polaires r et ω): $dr/d\omega = r(1 - r^2)$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique du plan privé de l'origine. Le cercle $r = 1$ est une feuille autour de laquelle les autres feuilles s'enroulent asymptotiquement.

L'espace quotient de $R^2 - 0$ par la relation d'équivalence ρ associée à la structure feuilletée admet dans ce cas une partition en un sous-espace ouvert homéomorphe à deux cercles et un point admettant comme seul voisinage l'espace tout entier.

DÉFINITION 3: Le couple $(0_i, h_i)$ formé d'une carte $h_i \in A$ et de son but 0_i s'appelle un ouvert distingué de la structure feuilletée (F) .

Énonçons les principaux résultats relatifs aux structures feuilletées du plan. Le théorème 1 qui suit est classique; sa démonstration repose sur le théorème de Jordan (dans une version particulièrement facile à établir); elle utilise donc essentiellement le fait que le plan R^2 est simplement connexe (ou plus précisément que son premier nombre de Betti modulo 2 est nul).

THÉORÈME 1 (Poincaré [5], Bendixon [1]): Soit $(0_i, h_i)$ un ouvert distingué d'une structure feuilletée du plan; l'image par h_i^{-1} de l'intersection de 0_i avec une feuille quelconque se réduit à l'ensemble vide ou à une droite $y = \text{Cte}$.

THÉORÈME 2 (Kaplan [3]): A toute structure feuilletée du plan R^2 on peut associer une fonction numérique ψ définie dans R^2 qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i) ψ est continue et n'admet pas de maximum ou de minimum (au sens large);
- (ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée.

THÉORÈME 3 (Kamke [2]): Soit (F) une structure feuilletée de classe C^r du plan R^2 . Soit Ω un ouvert borné du plan. Il existe une fonction numérique ψ définie dans Ω et qui vérifie les propriétés suivantes:

- (i) ψ est r -différentiable et le gradient de ψ est différent de 0 en tout point de Ω ;
- (ii) ψ est constante sur les feuilles de la structure feuilletée induite par (F) sur Ω .

THÉORÈME 4 (Wazewsky [7]): On peut munir le plan R^2 d'une structure feuilletée de classe C^∞ telle que toute fonction r -différentiable sur R^2 et qui est constante sur les feuilles de la structure feuilletée se réduise à une constante.

Nous ne reproduirons pas la démonstration du théorème 1, mais nous montrerons dans 2.2 et 2.3 que les théorèmes 2, 3 et 4 sont des conséquences du théorème 1 et des propriétés des variétés à une dimension établies dans la première partie.

Exemples de structures feuilletées du plan:

1. Les droites $y = Cte$ sont évidemment les feuilles d'une structure feuilletée du plan;
2. Soit C une courbe de Jordan dans le plan R^2 . La structure feuilletée précédente induit sur l'ouvert limité par C et qui est homéomorphe à R^2 une structure feuilletée analytique;
3. Le complémentaire U dans R^2 de l'ensemble des points de coordonnées $x = 0, y \geq 0$ est homéomorphe à R^2 . Les composantes connexes des lignes de niveau de la fonction $\psi = xy$ sont les feuilles d'une structure feuilletée analytique de U .

2.2. *L'espace des feuilles d'une structure feuilletée du plan.*

La proposition suivante est une conséquence essentielle du théorème 1 de 2.1.

PROPOSITION 1: *Soit (F) une structure feuilletée du plan R^2 . L'espace quotient V de R^2 par la relation d'équivalence ρ associée*

au feuilletage (cf. définition 2 de 2.1) est une variété à une dimension à base dénombrable et simplement connexe. Si (F) est une structure feuilletée différentiable de classe C^r (ou analytique), l'espace des feuilles V est muni canoniquement d'une structure de variété à une dimension différentielle de classe C^r (ou analytique).

Comme \mathbb{R}^2 est connexe et à base dénombrable, V est également connexe et à base dénombrable. Pour montrer que V est une variété à une dimension, il suffit de vérifier que tout point z de V admet un voisinage ouvert homéomorphe à la droite numérique. Soit π la projection canonique de \mathbb{R}^2 sur V ; la feuille $\pi^{-1}(z)$ rencontre au moins un ouvert distingué O_i . La relation d'équivalence induite par ρ dans O_i est, d'après le théorème 1, la relation ρ_i . Donc $\pi(O_i)$ qui est un voisinage ouvert de z , puisque ρ est une relation d'équivalence ouverte, est homéomorphe à O_i/ρ_i , c'est-à-dire à la droite numérique.

En vertu du théorème de Jordan, le complémentaire de toute feuille (qui est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2) a deux composantes connexes; le complémentaire de tout point de V a donc également deux composantes connexes. Cette propriété est équivalente au fait que V est simplement connexe (cf. 1.2, lemme).

Soit A un atlas définissant sur \mathbb{R}^2 la structure feuilletée différentiable considérée et soit \bar{h}_i la restriction de la carte $h_i \in A$ à la droite $x = 0$. L'ensemble des cartes \bar{h}_i de \mathbb{R} dans V est un atlas qui définit sur V une structure différentiable.

Le lecteur pourra construire à titre d'exercice l'espace des feuilles des structures feuilletées du plan définies dans les exemples ci-dessus.

2.3. Application des résultats de 1. aux structures feuilletées du plan.

Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 de 2:1 (Kaplan) est une conséquence immédiate de la proposition 1 de 2.2 et de la proposition 1 de 1.2. Soit f une application qui étale l'espace quotient \mathbb{R}^2/ρ dans \mathbb{R} ; l'application $\varphi = f\pi$ est une fonction numérique sur \mathbb{R}^2 qui satisfait aux conditions du théorème 2.

Démonstration du théorème 3.

Si le théorème est vrai pour les ouverts bornés et simplement connexes de \mathbb{R}^2 , il le sera également pour tout ouvert Ω borné; il suffit de considérer l'ouvert C limité par un cercle qui contient Ω ; si φ est une fonction dans C qui satisfait aux conditions du théorème, il en sera évidemment de même de sa restriction à Ω .

Ainsi le théorème de Kamke est une conséquence de la proposition 1 de 1.3 et de la proposition suivante:

PROPOSITION: L'espace des feuilles $V' = \Omega/\rho'$ de la structure feuilletée (F') induite par (F) sur Ω est munie d'une structure de variété différentiable régulière de classe C^r .

Soient π et π' respectivement les projections canoniques de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{R}^2/\rho = V$ et $\Omega/\rho' = V'$. L'injection canonique $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ définit par passage aux quotients une application continue ψ de V' dans V . Comme tout ouvert distingué de Ω est un ouvert distingué de \mathbb{R}^2 , l'application ψ étale V' dans V ; elle est r -différentiable et partout de rang 1.

Soit x' un point de V' et soit x le point $\psi(x')$. Comme Ω est relativement compact, l'intersection de la feuille $F = \pi^{-1}(x)$ avec l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est compacte. On peut alors trouver un ouvert distingué W dans \mathbb{R}^2 suffisamment étroit et allongé pour contenir $F \cap \overline{\Omega}$ et tel que $W \cap \Omega$ soit saturé par des feuilles de Ω . Il est appliqué par π sur un ouvert U homéomorphe à un intervalle et contenant x . Soit f' une fonction r -différentiable définie sur un voisinage U' homéomorphe à un intervalle de x' dans V' suffisamment petit pour que $\psi(U') \subset U$. L'application f obtenue en composant l'inverse de la restriction de ψ à U' avec l'application f' est une fonction r -différentiable définie sur un voisinage de x . Comme U est homéomorphe à un intervalle, il est possible de construire une fonction r -différentiable g sur U qui coïncide avec f sur un voisinage de x et qui s'annule en dehors d'un compact K contenu dans U . Comme $\pi^{-1}(K) \cap W \cap \Omega$ est un fermé dans Ω et qu'il est saturé par des feuilles de Ω , la fonction égale à $g\pi$ sur $W \cap \Omega$ et à zéro aux autres points de Ω est r -différentiable et définit par passage

aux quotients une fonction r -différentiable g' sur V' qui coïncide avec f' au voisinage de x' .

Démonstration du théorème 4.

Il est en général nécessaire de supposer que Ω est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient O_1 et O_2 deux exemplaires du plan \mathbb{R}^2 ; dans l'espace somme $O_1 + O_2$ considérons la relation d'équivalence qui identifie les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_2 = x_1 + 1/y_1$, $y_2 = y_1^3$ pour tout $y_1 < 0$ et qui se réduit à l'identité pour les points tels que $y_1 \geq 0$ ou $y_2 \geq 0$. L'espace quotient E est homéomorphe au plan \mathbb{R}^2 ; les deux cartes O_1 et O_2 forment un atlas qui définit sur E une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe C^∞ dont l'espace des feuilles soit une plume composée V (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toute fonction différentiable sur V se réduise à une constante.

CLASSIFICATION DES STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient V associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit V une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit A un atlas de \mathbb{R} sur V définissant une orientation de V . Soient x_1 et x_2 deux points de V qui ne sont pas séparés. Nous dirons que x_1 et x_2 ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons $x_1 \sim x_2 \text{ mod. } \lambda^+$ (respectivement λ^-) si, étant données deux cartes h_1 et h_2 de A telles

74771

VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

PAR

André HAEFLIGER, Paris, et Georges REEB, Grenoble

paru dans le vol. III, fasc. 2, à placer à la page 125.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENDIXON, Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24 (1901), pp. 1-80.
 - [2] KAMKE, Über die partielle Differentialgleichung $fz_x + gz_y = h$. *Math. Zeitschr.*, vol. 4 (1936), pp. 56-66 et vol. 42 (1936), pp. 287-300.
 - [3] KAPLAN, Regular curve families filling the plane I, II. *Duke Journ.*, 7 (1940), pp. 154-185 et 8 (1941), pp. 11-46.
 - [4] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7 sphere. *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 399-405.
 - [5] POINCARÉ, Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Œuvres*, tome I.
 - [6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Act. Scient. et Ind.*, 1183, Hermann, 1952.
 - [7] T. WAZEWSKY, Sur l'équation $Pp + Qq = 0$. *Mathematica*, 8 (1934), pp. 103-116; 9 (1935), pp. 179-182.
-

Vide-leer-empty

que $h_1(0) = x_1$ et $h_2(0) = x_2$, $h_2^{-1}h_1$ est défini pour des points d'abscisse > 0 (respectivement < 0). Ces deux relations sont des relations d'équivalence. Chaque classe contient un nombre fini ou dénombrable de points.

Appelons *structure feuilletée orientée du plan* \mathbb{R}^2 une structure feuilletée du plan orienté \mathbb{R}^2 avec une orientation cohérente des feuilles et disons que deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 qui transporte la première structure munie de son orientation sur la seconde structure munie de son orientation. (Remarquons que toute structure feuilletée du plan peut être orientée.)

On montre alors que l'espace des feuilles V de toute structure orientée du plan est une variété à une dimension orientée pour laquelle un ordre est déterminé canoniquement dans chaque classe d'équivalence modulo λ^+ ou λ^- . On dira que la variété orientée V est munie d'une structure d'ordre.

Deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes si et seulement s'il existe un homéomorphisme de l'espace des feuilles de la première structure sur l'espace des feuilles de la deuxième structure qui conserve la structure d'ordre.

Enfin, à toute variété à une dimension à base dénombrable, simplement connexe, orientée et munie d'une structure d'ordre, correspond une structure feuilletée du plan.

Reçu le 6 décembre 1956.
