Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor: de Rham, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33737

SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

G. DE RHAM, Lausanne

Soit $[y]$ le plus grand entier ne dépassant pas y et $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ la différence prise en valeur absolue entre x et l'entier le plus voisin de x. *La fonction*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x)$$

est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x.

La continuité résulte immédiatement de ce que $f(x)$ est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. L'inexistence de la dérivée peut aussi s'établir très simplement. Pour cela, partons de la remarque que si $f(x)$ était dérivable pour $x = x_0$, sa pente moyenne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dans un intervalle (x_1, x_2) contenant x_0 tendrait vers une limite, égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro. En particulier, la pente moyenne r_n de $f(x)$ dans l'intervalle $i_n = (2^{-n}[2^n x_0], 2^{-n}[2^n x_0] + 2^{-n})$ devrait tendre vers une limite pour $n \to \infty$. Or cela est impossible. En effet, la fonction $2^{-k} \varphi(2^k x)$ étant linéaire dans i_{k+1} avec une pente égale à ± 1 et s'annulant aux extrémités de i_n pour $n \leqslant k$, sa pente moyenne dans i_n est nulle pour $n \leqslant k$ et a toujours la même valeur ± 1 pour $n > k$; par suite, la différence de ses pentes moyennes dans i_{n+1} et dans i_n est nulle pour $k \neq n$ et vaut ± 1

pour $k = n$; cela entraîne immédiatement $r_{n+1} - r_n = \pm 1$, ce qui montre que r_n ne peut tendre vers une limite. C.Q.F.D.

Le même raisonnement montre que, si a est un entier positif pair,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \varphi(a^k x)$$

est une fonction continue sans dérivée. Pour $a = 10$, c'est l'exemple introduit par M. B. L. VAN DER WAERDEN [*Math. Zeitschr.*, 32 (1930), 474-475], qui prouve sa non dérivabilité par un raisonnement également très simple, dû à M. HEYTING, mais qui ne convient pas pour $a = 2$.

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(x) - a^{-1} f(ax) = \varphi(x)$$

dont elle est l'unique solution bornée. Il est intéressant de considérer plus généralement l'équation

$$\mathrm{F}(x) - b\,\mathrm{F}(ax) = g(x)\ ,$$

où $g(x)$ est une fonction donnée, a et b des constantes. Pour $0 < b < 1$, elle a une solution bornée, et une seule, qu'on obtient par la méthode d'itération,

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k g(a^k x)\ .$$

Cette fonction est évidemment continue si $g(x)$ est continue. Pour $g(x) = \cos x$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, on sait qu'elle n'a pas de dérivée: c'est l'exemple de WEIERSTRASS (voir par exemple GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, I, 73-75); mais la démonstration n'est pas aussi simple que pour $f(x)$.

Reçu le 23 novembre 1956.