Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1957)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHOIX DE QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE DANS LE PLAN

Autor: Hadwiger, H. / Debrunner, H.

Kapitel: 2me Partie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-33736

H. G. Eggleston [10]; elle n'a pas encore été démontrée pour $k > 3$.

Le théorème ci-dessus de K. Borsuk, non compris la précision de D. Gale, est aussi une conséquence, dans le cas d'un ensemble d'un nombre fini de points du plan, du théorème suivant sur le nombre de couples de points dont la distance est égale au diamètre de l'ensemble.

36. *Dans un ensemble, d'un nombre fini n de points, dont le diamètre est égal à 1, il y a au plus n couples distincts de points dont la distance est égale à 1.*

On en trouve une brève démonstration dans P. Erdös [13] — Cf. aussi H. Hopf et E. Pannwitz [23].

Les relations étroites entre tous ces groupes de théorèmes sont mises en évidence par la conséquence suivante du théorème **34** énoncée sous une forme analogue à celle du théorème de Helly.

37. *Pour que, dans un ensemble de cercles de rayon égal à 1, on puisse construire un triangle équilatéral de côté égal à 1, dont chaque cercle de l'ensemble contienne au moins l'un des sommets, il suffit que chaque couple de cercles de l'ensemble ait au moins un point commun.*

On trouve dans L. Fejes-Tóth [14] — page 97 — des énoncés analogues qui ne sont encore que partiellement démontrés.

2me Partie

Nous donnons ci-dessous de courtes démonstrations des théorèmes qui précèdent, d'après les sources indiquées. Nous nous bornons souvent à la suite des idées. Les raisonnements ne supposent que des propositions préalables élémentaires notamment des considérations simples sur les ensembles de points.

1. On raisonne par l'absurde: on considère des points P_i vérifiant les conditions de l'hypothèse et non alignés. On peut, en effectuant éventuellement une transformation projective supposer l'un d'eux P_1 à l'infini. Les droites joignant tous les couples de points sont, d'une part des parallèles (au moins 2) de direction P_1, d'autre part des transversales (au moins une). Si ces transversales étaient en nombre fini, il en existerait au moins une G formant avec les parallèles un angle minimum (au plus égal à tous les autres). Elle contiendrait au moins trois points différents, soit P_i, P_k et P_j entre P_i et P_k. La droite de direction P_1 passant par P_j contiendrait au moins un point P_m de l'ensemble (différent de P_j et à distance finie). L'une des droites $P_m P_i$ ou $P_m P_k$ formerait avec les parallèles un angle aigu inférieur (strictement) à celui de G, ce qui est absurde (contraire à la construction de G ou au nombre fini de transversales) [1].

2. C'est le transformé de **1** par dualité.

3. C'est une conséquence de **1**. Il suffit de transformer la figure par une inversion dont le pôle est un point de l'ensemble. Les circonférences passant par le pôle deviennent des droites vérifiant les conditions de **1**, donc réduites à une seule. (On continue ensuite de proche en proche.)

4. Le plus petit cercle de recouvrement (c'est-à-dire le plus petit cercle contenant tous les points de l'ensemble) contient sur son périmètre des points de l'ensemble, délimitant des arcs tous inférieurs ou égaux à des demi-circonférences. Il ne peut exister de point Q (strictement) intérieur au cercle car la symétrie relativement à la médiatrice du segment jolgnant Q à l'un des points précédents donnerait des points extérieurs (strictement) au cercle.

Si le nombre des points de l'ensemble est fini (supérieur à 2), on considère deux axes de symétrie dont l'angle φ est minimum. Le produit des symétries autour des axes est une rotation d'angle 2φ autour du centre du cercle, qui laisse l'ensemble invariant. Cet ensemble est donc un polygone régulier d'angle au centre φ égal à $2\pi/n$.

5. S'il existait des polygones réguliers de n sommets inscrits dans un réseau, il en existerait un de côté minimum, puisque la

[1] Cette légère modification de la démonstration met en évidence la nécessité de l'hypothèse du nombre fini d'éléments de l'ensemble de points. (Note des traducteurs.)

longueur d'un côté est égale à une expression $\sqrt{p^2 + q^2}$ (p et q entiers). Supposons construit un tel polygone $P_1 P_2 \ldots P_n$ et à partir de chaque sommet, portons un vecteur défini par les équipollences:

$$\overrightarrow{P_1 P_1'} = \overrightarrow{P_2 P_3}\,, \quad \overrightarrow{P_2 P_2'} = \overrightarrow{P_3 P_4}\,, \quad \ldots\,, \quad \overrightarrow{P_n P_n'} = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

Les extrémités de ces vecteurs seraient encore des points du réseau et pour $n = 5$ et $n \geqslant 7$, ils formeraient un polygone régulier de n sommets plus petit que le précédent qui ne pourrait donc être minimum. Pour établir l'impossibilité d'inscrire un triangle régulier de côté s, il suffit de remarquer que son aire est égale à s^2 $(\sqrt{3}/4)$. Elle serait donc irrationnelle puisque s^2 serait rationnelle. Or le calcul de cette aire en fonction des coordonnées des sommets, par exemple au moyen d'un déterminant, donnerait un nombre rationnel. Il y a donc absurdité. On démontre de même l'impossibilité d'inscrire un hexagone régulier de côté s dont l'aire est s^2 $(3\sqrt{3}/2)$.

6. Pour un losange inscrit dans le réseau, d'angle aigu α et de côté s, la surface qui est égale à $s^2 \sin \alpha$ peut être exprimée en fonction des coordonnées des sommets, ce qui donne un nombre entier. La valeur de $\sin \alpha$ est donc rationnelle. D'après la propriété **8**, pour α commensurable avec π ceci n'est possible que pour α égal à $\pi/6$ ou à $\pi/2$. Le premier cas est à rejeter: par une rotation de $\pi/2$ autour d'un sommet du losange, point du réseau, on transformerait les autres sommets en de nouveaux points du réseau. Il apparaîtrait alors un triangle équilatéral inscrit, ce qui est contraire à la propriété **5**.

7. Conséquence immédiate de **8**.

8. La démonstration du théorème **5** pour les polygones réguliers dont le nombre des sommets est $n = 5$ ou $n \geqslant 7$, reste valable pour un réseau rectangulaire (points de coordonnées Ax et By où A et B sont des nombres fixes et x et y des entiers quelconques.) Le théorème **8** résultera de l'énoncé suivant qui est plus général: « Les seuls polygones réguliers qui peuvent être inscrits dans un réseau rectangulaire sont les triangles, les carrés et les hexagones. »

Considérons, en effet, un angle $\alpha = 2\pi(m/n)$ défini par une fraction m/n irréductible. Les formules de trigonométrie permettent de calculer en fonction rationnelle (à coefficients rationnels) de $\cos \alpha$ les nombres a_ν et b_ν tels que $\cos \nu\alpha = a_\nu$; $\sin \nu\alpha = b_\nu \sin \alpha$ ($\nu = 1, 2, ..., n$). Ces nombres sont donc rationnels si $\cos \alpha$ l'est. En désignant par N le dénominateur commun des $2n$ quantités a_ν et b_ν, on construit un réseau rectangulaire avec les points de coordonnées $(1/\mathrm{N})\,x$ et $(\sin \alpha/\mathrm{N})\,y$; x et y entiers. Sur une circonférence de rayon 1 ayant pour centre un point du réseau, tous les points d'angle polaire $\nu\alpha$ sont des points du réseau. Puisque $\alpha = 2\pi\,(m/n)$ ces points forment un polygone régulier de n sommets. Ceci n'est possible, d'après l'extension du théorème **5** aux réseaux rectangulaires, que pour n égal à 1 ou à 2 ou à 3 ou à 4 ou à 6. Comme α est aigu, il en résulte que $\alpha = \pi/3$.

9. On démontre le théorème par l'absurde: en considérant trois points non alignés A, B, C dont les distances mutuelles sont des nombres entiers et en désignant par k la plus grande des distances d (A, B) et d (B, C). Les distances d'un point P aux points A, B, C vérifient les relations:

$$|\,d(\mathrm{P}, \mathrm{A}) - d(\mathrm{P}, \mathrm{B})\,| \leqslant d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$
$$|\,d(\mathrm{P}, \mathrm{B}) - d(\mathrm{P}, \mathrm{C})\,| \leqslant d(\mathrm{B}, \mathrm{C}).$$

Si ces distances sont des nombres entiers, les différences des premiers membres ne peuvent prendre au plus que les valeurs $0, 1, 2, ..., k$. Un point P est donc situé sur une des $k + 1$ hyperboles de foyers A et B et sur une des $k + 1$ hyperboles des foyers B et C. Il n'y a donc qu'un nombre fini, au plus égal à $4(k + 1)^2$, de points P possibles.

10. La condition est évidemment suffisante. Elle est manifestement nécessaire pour un ensemble d'un nombre fini de points dont l'enveloppe convexe est alors un polygone convexe (intérieur et périmètre compris) dont les sommets appartiennent à l'ensemble. Il suffit de décomposer ce polygone en triangles en joignant un de ses sommets à chacun des autres. Un point appartenant au polygone appartient à au moins un de ces triangles (éventuellement à deux). Reste à considérer un ensemble M d'un nombre infini de points. On forme la réunion $\overline{N}$ de toutes les enveloppes convexes des combinaisons d'un nombre fini de points de M. Cette réunion contient l'enveloppe $\overline{M}$ de M car elle contient tous les points de M et tous les points de chaque segment joignant deux points de M. Or $\overline{M}$ est le plus petit ensemble qui possède ces deux propriétés. Donc tout point contenu dans $\overline{M}$ l'est dans $\overline{N}$ et par suite dans au moins une enveloppe triangulaire de trois points de M.

11. La condition est encore évidemment suffisante. Si un point P est intérieur [1] à l'enveloppe convexe $\overline{M}$ d'un ensemble de points (non alignés) M, il est intérieur à un triangle (non aplati) dont les sommets appartiennent à $\overline{M}$. D'après la propriété **10** chacun de ces sommets appartient à l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de trois points de M; de sorte que le triangle appartient à l'enveloppe convexe (polygone) d'un nombre fini de points de M, qu'on peut décomposer en triangles en joignant un de ses sommets à chacun des autres. Le point P est intérieur soit à l'un de ces triangles, soit à la réunion de deux triangles adjacents (s'il est sur leur côté commun); il est donc intérieur à l'enveloppe convexe d'au plus quatre points de M.

12. La condition est évidemment nécessaire. On démontre qu'elle est suffisante par l'absurde, en considérant deux ensembles, fermés et bornés, M et N non séparables et en construisant deux sous-ensembles respectifs M′ et N′ également non séparables, dont la réunion comprend au plus quatre points. Si M et N ne sont pas séparables, leurs enveloppes convexes $\overline{M}$ et $\overline{N}$ ont au moins un point commun P [2]. D'après la propriété **10** on peut associer à ce point P des sous-ensembles M″ et N″ (de M et de N) de chacun trois points, dont les enveloppes convexes $\overline{M''}$ et $\overline{N''}$ contiennent P. Alors: ou l'une ou l'autre de ces enve-

---

[1] On remarquera la distinction entre un point qui appartient à un ensemble et un point qui est intérieur à un ensemble convexe. Dans le second cas le point est intérieur (appartient, périmètre exclu) à un triangle (non aplati) dont tous les points (périmètre inclus) appartiennent à l'ensemble convexe (Note des traducteurs).

[2] Si les ovales $\overline{M}$ et $\overline{N}$ n'ont pas de point commun, la distance de $\overline{M}$ et $\overline{N}$ est réalisée par deux points distincts de $\overline{M}$ et $\overline{N}$. La médiatrice (Mittelsenkrechte) de ces points sépare M et N.

loppes est incluse dans l'autre, par exemple $\overline{M''} \subset \overline{N''}$; ou certains des côtés de $\overline{M''}$ et $\overline{N''}$ sont des segments sécants. Dans le premier cas on peut constituer M′ avec l'un des points de M″ et prendre $N' = N''$. Dans le second cas, on peut prendre pour M′ et N′ les extrémités de chacun de deux côtés sécants. Il est visible que, dans les deux cas, M′ et N′ ne sont pas séparables; leurs enveloppes convexes ont d'ailleurs des points communs.

13. Il suffit de considérer dans l'ensemble M un sous-ensemble de quatre points. Si leur enveloppe convexe n'est pas un quadrilatère (non dégénéré) l'un des points N est contenu dans l'enveloppe convexe des trois autres, et, a fortiori, dans l'enveloppe convexe de $M - N$. Les deux ensembles N et $M - N$ sont sans points communs (disjoints ou formant partition de M) et ils ne sont pas séparables. Si, au contraire, l'enveloppe convexe des quatre points est un quadrilatère (convexe) on peut prendre pour N deux sommets opposés; N et $M - N$ sont encore deux sous-ensembles sans point commun et non séparables.

14. Pour un système d'ovales en nombre fini, le théorème de Helly se déduit par récurrence sur n du lemme suivant:

> Pour que k ovales ($k \geqslant 4$) aient un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chacune des combinaisons de $k - 1$ de ces ovales.

Appelons P_i un point contenu dans les ovales $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sauf, peut-être dans C_i. D'après la propriété **13** les k points P_i ($i = 1, \ldots, k$) peuvent être répartis en deux ensembles $M' = (P_{i1}, \ldots, P_{im})$ et $M'' = (P_{j1}, \ldots P_{jn})$ sans point commun et dont les enveloppes convexes $\overline{M'}$ et $\overline{M''}$ ont un point commun P_0. Mais alors tout point de $\overline{M'}$ appartient aux ovales sauf peut-être à $C_{i1}, \ldots, C_{im}$ et tout point de $\overline{M''}$ appartient aux ovales sauf peut-être à $C_{j1}, \ldots, C_{jn}$. Le point P_0 qui appartient à $\overline{M'}$ et à $\overline{M''}$ appartient donc à tous les ovales, sans exception.

Pour un ensemble d'ovales en nombre infini, on raisonne par l'absurde. S'ils n'avaient pas de point commun, à tout point P d'un ovale C_1, on pourrait faire correspondre au moins un ovale C_i ne contenant pas P ni même aucun point d'un cercle de centre P et de rayon convenable. Mais d'après le théorème de Heine-Borel, on pourrait, dans tous ces cercles, en choisir un nombre fini qui recouvriraient l'ovale C_1. A ces cercles correspondraient des ovales C_i, en nombre fini, formant avec C_1 un ensemble d'ovales, en nombre fini, vérifiant les conditions suffisantes énoncées, et cependant sans point commun.

15. Le théorème **14** étant acquis, il suffit d'établir que trois rectangles, à côtés parallèles, R_1, R_2, R_3 ont nécessairement un point commun lorsqu'il en est ainsi pour chacun de leurs trois couples. On prend des axes parallèles aux côtés des rectangles et on appelle x_i, y_i ($i = 1$ ou 2 ou 3) les coordonnées d'un point P_i commun aux deux rectangles d'indices différents de i. Les points P_i et P_j, ainsi que le segment qui les joint et le rectangle de côtés parallèles aux axes qui a ce segment pour diagonale sont contenus dans le rectangle R_k (k différent de i et j). Donc tout point P de coordonnées x et y appartient à R_k lorsque x est compris entre x_i et x_j et y compris entre y_i et y_j. On peut choisir les indices de telle sorte que: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ et $y_i \leqslant y_j \leqslant y_k$ (i, j, k différents). Alors le point P de coordonnées x_2 et y_j vérifie les conditions précédentes pour qu'il appartienne à chacun des rectangles, donc aux trois.

16. Ce théorème est un cas particulier du précédent en considérant des rectangles aplatis sur une même droite.

17. C'est une conséquence de la propriété **14**. Il suffit de considérer les segments circulaires (inférieurs à un demi-cercle) qui ont pour bases les arcs de l'ensemble. Ce sont des ovales qui ont un point commun s'il en est ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux. L'existence d'un point commun est équivalente à la même propriété pour leurs arcs.

18. C'est une conséquence de la propriété **16**. Si des arcs inférieurs au tiers de la circonférence ont au moins un point commun avec l'un d'eux, C_i, aucun ne contient le point I diamétralement opposé au milieu de C_i. En coupant la circonférence en I et en la développant sur une droite, on est ramené à l'existence de points communs à des segments de cette droite.

19. On considère une droite orientée G (α) passant par le centre de la circonférence et d'angle α avec une direction fixe. En projetant orthogonalement sur G (α) les arcs considérés, on obtient des segments (dont certaines parties peuvent être obtenues deux fois) dont chaque couple a (au moins) un point commun. D'après la propriété **16**, ils ont une intersection D (α), peut-être réduite à un point, mais qui n'est pas vide. Lorsqu'on passe de D (α) à D ($\alpha + \pi$), les abscisses (relativement au centre du cercle) des points de cette intersection prennent des valeurs opposées. Comme ces abscisses varient de façon continue en fonction de α, il existe une valeur α_0 pour laquelle une de ces abscisses est nulle; c'est-à-dire que le centre est alors commun à tous les segments et la droite projetante G ($\alpha_0 + \pi/2$) est un diamètre qui rencontre tous les arcs.

Les énoncés **20** à **28** se déduisent par des transformations géométriques convenables des théorèmes **14**, **16**, **17**, **19**.

20-21-22. La position d'un ovale A qui se déplace par translation est caractérisée par celle d'un point P invariablement lié à A. On démontre aisément que le point P décrit un ovale B_1^* ou B_2^* ou B_3^* lorsque A se déplace par translation de toutes les façons possibles en restant contenu dans un ovale B, ou en rencontrant B, ou en contenant B. Cette association des ovales B* au déplacement de A, ramène les énoncés **20** ou **21** ou **22** au théorème **14**.

23. En projetant par rapport à un point O arbitraire les ovales d'un ensemble, vérifiant la condition suffisante énoncée, sur une circonférence de centre O, on obtient un ensemble d'arcs vérifiant la condition suffisante du théorème **19**. Il existe un diamètre qui les coupe tous et la droite qui le porte coupe tous les ovales.

24. Une projection orthogonale sur une droite quelconque des ovales d'un ensemble, vérifiant la condition suffisante énoncée, les transforme en segments vérifiant la condition suffisante du théorème **16**. Il existe un point commun à tous ces segments et la droite projetant ce point coupe tous les ovales.

25. Lorsque, parmi les rectangles, il en existe deux qui ne sont traversés que par une seule droite « montante », cette sécante unique rencontre, en raison de l'hypothèse, tout autre rectangle et c'est une sécante commune.

Si cette condition particulière n'est pas réalisée, on peut d'abord établir la propriété pour un ensemble d'un nombre fini de rectangles. On mène deux parallèles orientées, distinctes, à l'une des directions des côtés. On repère une droite montante par les abscisses de ses points d'intersection avec ces parallèles et on lui fait correspondre biunivoquement le point qui, dans un plan auxiliaire, a ces abscisses pour coordonnées cartésiennes. A l'ensemble des droites montantes qui traversent un rectangles correspond ainsi, dans le plan auxiliaire, un ensemble de points qui est manifestement convexe, fermé mais non borné. Chaque combinaison de trois de ces domaines a au moins un point commun à distance finie (correspondant à la sécante commune aux trois rectangles correspondants). Pour un ensemble d'un nombre fini de rectangles on peut tracer, dans le plan auxiliaire, un cercle contenant tous les points communs aux combinaisons de trois des domaines. Ses intersections avec les domaines sont des ovales qui vérifient la condition suffisante du théorème **14**. Ils ont donc un point commun auquel correspond une sécante commune à tous les rectangles.

Dans le cas d'un ensemble de rectangles en nombre infini, on pourrait utiliser une variante plus précise du théorème **14**. On remarque seulement qu'en conséquence de ce qui vient d'être démontré, chaque combinaison de quatre rectangles de l'ensemble a au moins une sécante commune.

A toute droite montante on fait correspondre sur une circonférence auxiliaire le point dont l'angle polaire φ est égal à l'angle de la droite avec les parallèles orientées considérées. A tout couple de rectangles correspond l'ensemble des droites montantes qui les rencontrent, et, par suite, un arc de la circonférence inférieur au tiers de celle-ci. Dans l'ensemble de ces arcs, tout couple a au moins un point commun, puisqu'il correspond à une combinaison de quatre rectangles. C'est la condition suffisante du théorème **18**; les arcs ont donc un point commun auquel correspond une direction telle que chaque couple de rectangles ait une sécante commune parallèle à cette direction.

Il suffit alors de projeter parallèlement à cette direction les rectangles de l'ensemble sur une transversale. On obtient des segments pour lesquels chaque couple de segments à un point commun au moins. C'est la condition suffisante du théorème **16**; il y a donc un point commun à tous ces segments et sa projetante est une sécante commune à tous les rectangles.

26. Sur une circonférence où a été fixé un point P, on fait correspondre biunivoquement à chaque direction de droite dans le plan, le deuxième point d'intersection avec la circonférence de la parallèle menée par P à cette direction. A l'ensemble des sécantes communes à deux ovales correspond ainsi un arc de la circonférence. Aux couples d'un ensemble d'ovales vérifiant la condition du théorème, correspond un ensemble d'arcs tel que tout couple d'entre eux ait au moins un point commun; ce qui est la condition suffisante du théorème **19**. Il existe donc un diamètre qui coupe tous les arcs et à ses extrémités correspondent deux directions orthogonales telles, que pour chaque couple d'ovales, il existe au moins une sécante commune parallèle à une de ces deux directions. Les ovales étant homothétiques entre eux, on mène à l'un d'eux les deux couples de tangentes (ou de droites d'appui) respectivement parallèles aux directions déterminées. Tout autre ovale de l'ensemble, au moins égal (dans un rapport d'homothétie au moins égal à 1), est nécessairement traversé par une de ces quatre droites.

La propriété est alors démontrée lorsqu'il existe dans l'ensemble un ovale minimum. Sinon on peut la démontrer par quelques considérations supplémentaires sur les conditions de convergence des ovales, en grandeur et en position.

27. On considère d'abord toutes les droites qui traversent deux ovales A et B de l'ensemble. Les angles qu'elles font avec la direction de séparation ont respectivement des déterminations φ qui sont toutes les valeurs comprises, au sens large, entre deux d'entre elles: $\alpha_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2$ et $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < \pi$ puisqu'elles ne comprennent ni 0 ni π. Cet ensemble, assimilable à un segment de droite, intérieur à un segment de longueur π, sera désigné par (AB).

Supposons, au moins provisoirement, que chaque couple des segments (AB) a au moins un point (ou une valeur) commun.

C'est la condition suffisante du théorème **16** et il y a une valeur φ_0 (intérieure à l'intervalle $0, \pi$) commune à tous les segments ou intervalles (AB). C'est dire que pour chaque couple d'ovales il y a une sécante commune de direction φ_0.

Projetons les ovales de l'ensemble parallèlement à la direction φ_0 sur une droite de séparation. Les ovales se projettent suivant des segments et chaque couple de ces segments a un point commun.

En appliquant à nouveau le théorème **16**, on en déduit que tous ces segments ont un point commun P_0 et la projetante (de direction φ_0) menée par P_0 rencontre tous les ovales de l'ensemble.

Reste à prouver la supposition précédente, c'est-à-dire que, dans un ensemble d'ovales vérifiant les conditions de l'énoncé, il existe une valeur commune à tout couple d'intervalles (A_1 A_2) et (B_1 B_2) défini par deux couples d'ovales A_1 et A_2, B_1 et B_2. (C'était la condition de P. Vincensini: existence d'une sécante commune à quatre ovales). Cette existence résulte des hypothèses lorsque les deux couples d'ovales ont un ovale commun, par exemple, A et B, B et C, puisqu'il existe une sécante commune aux trois ovales A, B et C.

Pour deux couples formés de quatre ovales distincts, on raisonne par l'absurde. Si les deux segments (A_1 A_2) et (B_1 B_2) intérieurs au segment $0, \pi$ étaient sans point commun, il existerait un segment intermédiaire entre eux. Si φ' est une valeur intérieure à ce segment, il existe au moins une droite de direction φ' séparant A_1 de A_2 et une autre séparant B_1 de B_2. Ces deux droites parallèles séparent de plus un autre des couples constitués avec A_1, A_2, B_1, B_2, soit A_1 B_2. Le segment (A_1 B_2) a des points communs avec le segment (A_1 A_2) puisque les couples A_1, B_2 et A_1, A_2 ont un ovale commun. Il en a aussi avec le segment (B_1 B_2). Il devrait donc contenir tout le segment intermédiaire précédent et, en particulier la valeur φ'. Il y aurait donc une sécante commune au moins à A_1 et B_2 de direction φ' ce qui est contraire à l'hypothèse puisque la direction φ' sépare A_1 et B_2.

28. On peut appliquer la transformation utilisée dans la démonstration du théorème **26**. On est ramené à comparer des arcs inférieurs à un tiers de circonférence, ayant deux à deux des points communs. D'après la remarque faite dans la démonstration du théorème **18**, ils laissent à découvert un point de la circonférence.

29. C'est un cas particulier de **21**.

30. En remplaçant les droites par des segments de longueur suffisante, on est ramené au théorème **21**.

31. En raison du théorème **29**, il suffit d'établir la propriété pour un ensemble de trois points. Si ceux-ci forment un triangle (éventuellement aplati) qui a un angle obtus le cercle de recouvrement a pour diamètre le côté opposé à l'angle obtus, qui est le plus grand donc égal au diamètre 1. Le rayon de recouvrement est alors égal à $1/2$.

Si les trois points forment un triangle (non aplati) qui a ses trois angles aigus le cercle de recouvrement est le cercle circonscrit, dont le rayon est la valeur commune de $a/2 \sin \alpha$ où a est la longueur d'un côté et α l'angle opposé. Dans tout triangle il y a un angle au moins égal à $\pi/3$. Donc $a \leqslant 1$; $\sin \alpha \geqslant \sqrt{3}/2$ donc $a/2 \sin \alpha \leqslant 1/\sqrt{3}$.

32. Il suffit encore, en raison du théorème **30**, d'établir la propriété pour un ensemble de trois droites de diamètre égal à 1. Elles forment un triangle de périmètre au plus égal à 3 qui est circonscrit au plus petit des cercles sécants. Comme le triangle équilatéral de périmètre $6r\sqrt{3}$ est le triangle de plus petit périmètre circonscrit au cercle de rayon r on en déduit $6r\sqrt{3} \leqslant 3$ et $r \leqslant 1/2\sqrt{3}$.

33. L'ensemble étant borné, on peut construire deux triangles équilatéraux S et S* circonscrits, à côtés respectivement parallèles et disposés symétriquement; chacun de leurs côtés contenant au moins un point de l'ensemble. En menant par un point intérieur à chacun des triangles des perpendiculaires à leurs côtés, on obtient des segments dont les sommes sont respectivement égales aux hauteurs des triangles S et S*, d'après une propriété bien connue de géométrie élémentaire. Mais chacune des sommes de deux de ces segments opposés est au plus égale au diamètre de l'ensemble qui est égal à 1. La somme des hauteurs des deux triangles est donc au plus égale à trois. L'une d'elles est au plus égale à 3/2 et le côté du triangle correspondant est au plus égal à $\sqrt{3}$.

34. En reprenant la démonstration du théorème **33**, on voit que les longueurs des côtés des triangles équilatéraux circonscrits S et S* sont des fonctions continues de la direction de l'un des côtés, choisi comme base. Après une rotation d'angle π de cette direction, la longueur des côtés de S se change en celle des côtés de S*. Il y a donc une position pour laquelle ces deux triangles sont égaux. Leur intersection dans laquelle est contenu l'ensemble de diamètre égal à 1, est un hexagone convexe, éventuellement dégénéré, qui a un centre de symétrie et des côtés parallèles dont la distance est au plus égale à 1. Cette intersection est contenue, entièrement, dans un hexagone régulier, de même centre de symétrie, de côtés parallèles de distance égale à 1. Il contient l'ensemble considéré et la longueur de ses côtés est $1/\sqrt{3}$.

35. C'est une conséquence de **34**. Du centre de l'hexagone régulier ainsi circonscrit à un ensemble de diamètre égal à 1, il suffit d'abaisser des perpendiculaires sur trois de ses côtés non consécutifs. On décompose ainsi l'hexagone en trois pentagones égaux, chacun de diamètre égal à $\sqrt{3}/2$, dont la réunion recouvre bien l'ensemble considéré.

36. La propriété est évidente pour $n = 3$. On la démontre, par récurrence sur n, pour un ensemble de points $P_1, P_2, \dots, P_n$ en nombre au moins égal à quatre, de diamètre égal à 1. On trace tous les segments $P_i\,P_k$ de longueur effectivement égale à 1. Si, à chaque point P_i correspondent au plus deux segments ainsi tracés, qui l'ont pour origine commune, le nombre de tous ces segments est bien au plus égal à n. Sinon, il existe un point P_1 qui est une extrémité commune de trois segments $P_1\,P_i$, $P_1\,P_j$, $P_1\,P_k$ de longueur égale à 1, et dont les autres extrémités sont de distances mutuelles au plus égales à 1. Les angles de ces segments, pris deux à deux, sont inférieurs à $\pi/3$ et l'un des segments noté $P_1\,P_j$ est contenu dans l'angle aigu des deux autres. On vérifie alors aisément que tout point Q du plan différent de P_1, qui est à une distance égale à 1 de P_j est à une distance supérieure à 1 d'au moins l'un des trois points P_1, P_i, P_k et par suite n'appartient pas à l'ensemble. En supprimant P_j dans l'ensemble considéré on n'y supprime qu'un seul segment de longueur 1, d'où la récurrence.

De cette démonstration, il résulte encore que dans un ensemble de n points, de diamètre égal à 1, il y a toujours au moins un point P_1 à une distance égale à 1 de deux autres points au plus, P_i et P_j. Le théorème de Borsuk qui est évident pour $n = 3$ s'en déduit encore par récurrence sur n. Car on peut décomposer l'ensemble des $n - 1$ points, obtenu par suppression de P_1 en trois sous-ensembles de diamètre inférieur à 1. L'un d'entre eux ne contient ni P_i ni P_j; en lui adjoignant P_1, il reste encore de diamètre inférieur à 1, et on obtient ainsi une décomposition de l'ensemble primitif.

37. Puisque les cercles de rayon 1 ont deux à deux des points communs, leurs centres forment un ensemble de diamètre au plus égal à 2. D'après **34** on peut le recouvrir par un hexagone de côté $2/\sqrt{3}$. Les milieux des côtés d'un triangle équilatéral inscrit dans cet hexagone forment un triangle équilatéral de côté égal à 1. Tout point de l'hexagone et, en particulier, tout centre d'un cercle de l'ensemble est à une distance au plus égale à 1 d'au moins l'un des sommets de ce triangle.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] Altwegg, M. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, *7*, 56-58, 1952.

[2] Anning, N. H. and P. Erdös. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *51*, 598-600, 1945.

[3] Balasubramanian, N. A theorem on sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *19*, 839, 1953.

[4] Bernheim, B. and Th. Motzkin. A criterium for divisibility of n-gons into k-gons. *Comment. Math. Helvetici*, *22*, 93-102, 1949.

[5] Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, *20*, 177-190, 1933.

[6] de Bruijn, N. G. and P. Erdös. On a combinatorial problem. *Indagationes Math.*, *10*, 421-423, 1948.