

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 3 (1957)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHOIX DE QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE
COMBINATOIRE DANS LE PLAN
Autor: Hadwiger, H. / Debrunner, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-33736>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHOIX DE QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE DANS LE PLAN¹

PAR

H. HADWIGER et H. DEBRUNNER, Berne.

Il existe des domaines des sciences mathématiques où l'on passe sans transition de théories élémentaires à des problèmes plus difficiles qui ne sont même encore que partiellement résolus. C'est ainsi que des propriétés très simples enseignées dans les classes s'apparentent à d'autres d'un grand intérêt scientifique et abordées seulement par des spécialistes. Il y a donc un certain avantage à ne pas séparer, comme on le fait habituellement, ces deux domaines en utilisant des théories difficiles, longuement développées et formées de toute une gamme de notions empilées les unes sur les autres.

Il en est ainsi de la géométrie combinatoire, qui, limitée au plan, présente un caractère particulièrement simple. Ses problèmes sont en rapport étroit avec les propriétés de la géométrie élémentaire et ne font intervenir que les opérations et les relations primordiales: recouvrements, intersections, décompositions... ainsi que le dénombrement des combinaisons.

C'est un domaine proche de la topologie, mais les notions générales de topologie y sont moins nécessaires et les problèmes peuvent s'y résoudre par des méthodes élémentaires. On trouvera dans H. HOPF [22] un exposé plus détaillé de la corrélation entre les points de vue topologique et métrique en géométrie combinatoire.

¹ L'article allemand a paru dans le Tome I, 2^{me} Série de *L'Enseignement mathématique*, 1955, pages 56 à 89. La traduction française a été assurée par le « Service de documentation du Centre national français de la Recherche scientifique ». Elle a été revue et légèrement adaptée à la langue mathématique française par J. CHATELET.

Le rapprochement que nous avons entrepris entre de nombreux problèmes n'est pas d'ailleurs strictement limité au cadre de cette géométrie combinatoire. C'est un petit noyau de tout un ensemble de questions qui peut exercer une impulsion singulière en raison de la simplicité des propriétés et de l'aspect purement combinatoire de leurs hypothèses.

C'est pour suivre cette directive et pour nous conformer à la tendance qui fait passer méthodiquement et rationnellement du domaine des mathématiques classiques à des procédés plus modernes et à des possibilités attrayantes, que nous présentons au lecteur les exemples qui suivent.

Ils ne supposent, en plus des principes généraux de la géométrie élémentaire et de la théorie des nombres réels, que peu de connaissances préalables. Il est utile cependant d'être familiarisé avec la notion d'ensemble et plus spécialement avec celle des ensembles de points. Quelques définitions sont, éventuellement, précisées dans le texte.

Dans la première partie on a donné un choix de théorèmes, groupés par énoncés, sans démonstration, mais avec un commentaire et des références. Dans la deuxième partie, on trouvera les démonstrations, ou tout au moins leurs esquisses. Les lecteurs qui s'y intéresseront particulièrement, pourront se reporter aux nombreux travaux indiqués et poursuivre eux-mêmes la recherche des problèmes qui ne sont pas encore résolus et dont nous avons signalé quelques-uns.

Nous espérons avoir ainsi éveillé chez les lecteurs un intérêt plus grand pour des questions passionnantes et avoir augmenté l'efficacité des liens qui existent entre les connaissances élémentaires de la géométrie et la recherche scientifique.

1^{re} PARTIE

Un premier groupe de quatre théorèmes concerne des conditions d'appartenance de points à une droite ou à une circonférence.

1. *Pour que les points d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à trois), soient alignés, il suffit (et il faut, manifestement)*

que, pour chaque couple d'entre eux, la droite qui les joint contienne au moins un troisième point, distinct, de l'ensemble.

De ce théorème, entrevu en 1893 par J. J. SYLVESTER [55], il existe une brève démonstration de T. GALLAI (Grunwald) citée par N. G. DE BRUIJN-P. ERDÖS [6]; elle en fait une application d'un théorème purement combinatoire. On trouvera d'autres démonstrations ainsi que des généralisations et des variantes dans les travaux cités de P. ERDÖS [11]; H. S. M. COXETER [7]; G. A. DIRAC [9] et Th. MOTZKIN [39].

- 2.** *Pour que les droites d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à trois), soient concourantes, il suffit (et il faut, manifestement) que, pour chaque couple d'entre elles, passe par leur point d'intersection au moins une troisième droite, distincte, de l'ensemble.*

Les conclusions de ces théorèmes **1** et **2** ne sont plus vraies lorsque les ensembles de points ou de droites ont un nombre infini d'éléments. C'est ce que montre, pour les deux énoncés à la fois, l'exemple de la figure 1 qui représente un ensemble infini dénombrable de points et de droites.

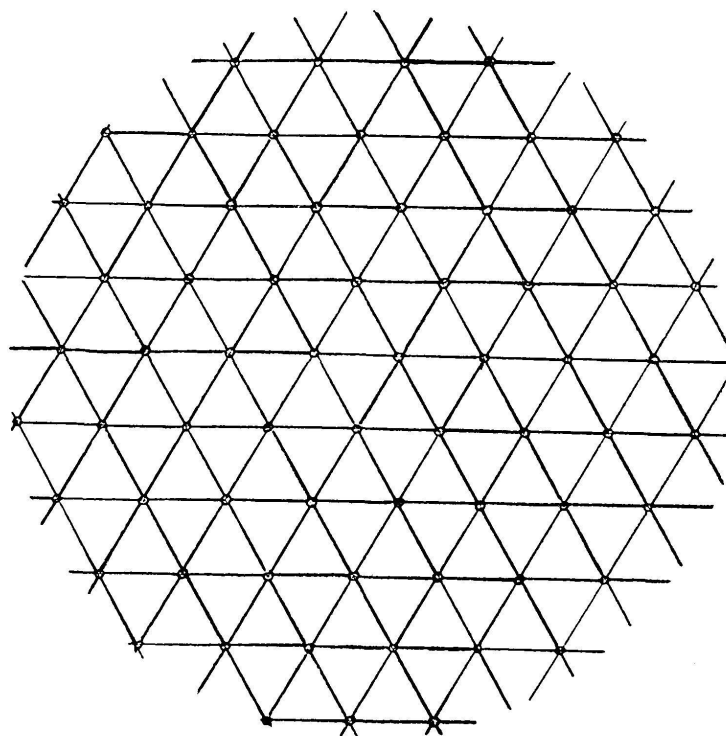


FIG. 1

- 3.** *Pour que les points d'un ensemble, en nombre fini (au moins égal à quatre), appartiennent à une même circonférence, il suffit (et il faut, manifestement) que pour chaque combinaison de trois d'entre eux, la circonférence (qui peut être dégénérée en droite) qui les contient, contienne au moins un quatrième point, distinct de l'ensemble.*

Etroitement apparenté au théorème **3**, dans ses hypothèses et sa conclusion, le théorème suivant concerne un ensemble de points, borné (c'est-à-dire contenu dans un cercle de rayon fini) et fermé (c'est-à-dire contenant ses points d'accumulation).

- 4.** *Pour que les points d'un ensemble borné et fermé, en nombre fini ou infini, appartiennent à une même circonférence, il suffit (sans que cela soit nécessaire) que l'axe de symétrie de chaque couple d'entre eux soit axe de symétrie de tout l'ensemble.*

Les conclusions des théorèmes **3** et **4** ne sont plus vraies lorsque l'ensemble de points n'est pas borné. L'ensemble de tous les points du plan en est un exemple. On peut aussi constituer un ensemble dénombrable de points, non fermé, qui vérifie les autres hypothèses des théorèmes **3** et **4** sans que ces points appartiennent à une même circonférence :

En partant d'un système A_0 de quatre points, qui ne sont ni alignés ni sur une même circonférence, on construit par récurrence une suite ascendante d'ensembles de points $A_n = \varphi(A_{n-1})$. L'expression $\varphi(A)$ désigne la réunion des ensembles symétriques de A relativement à chacun des axes de symétrie de tous les couples de points de A . On voit aisément que la réunion des A_n est un ensemble dénombrable de points, en nombre infini, qui possède la propriété de symétrie du théorème **4**. En outre, toute circonférence passant par trois points de l'ensemble contient un quatrième point distinct, sauf si ces trois points forment un triangle équilatéral. On peut même éviter cette exception par une généralisation très simple de la construction $\varphi(A)$.

Nous indiquons maintenant une série de théorèmes dans lesquels les longueurs ont pour mesures des nombres entiers ou rationnels.

On appelle « réseau » plan l'ensemble des points dont les coordonnées relatives à deux axes rectangulaires d'un plan sont des nombres entiers.

5. *Le carré est le seul polygone régulier qui peut être inscrit dans un réseau ; c'est-à-dire dont on peut choisir les sommets parmi les points d'un réseau.*

Une démonstration originale a été donnée par W. SCHERRER [52]; en ce qui concerne l'impossibilité d'inscrire un triangle dans un réseau, on peut voir aussi le problème 238 de G. PÓLYA-G. SZEGÖ [43] Vol. 2, p. 156.

La possibilité d'inscription d'un carré, en dehors du cas trivial, est en évidence dans la figure 2.

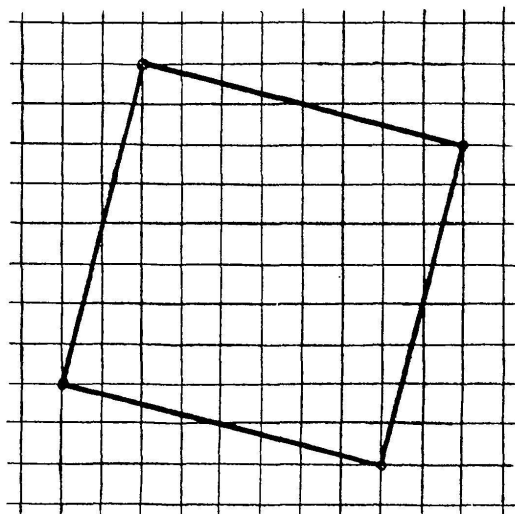


FIG. 2

Le théorème suivant concerne les angles d'un losange inscrit dans un réseau.

6. *Pour tout losange, non carré, d'angle aigu α , inscrit dans un réseau, le rapport α/π est irrationnel. Autrement dit, le carré est le seul losange inscrit dans un réseau dont les angles sont commensurables avec π .*

En relation étroite avec le précédent, l'énoncé suivant concerne les triangles de Pythagore, c'est-à-dire les triangles rec-

tangles dont les trois côtés ont des longueurs proportionnelles à des nombres entiers.

7. *Dans tout triangle de Pythagore les angles aigus sont incommensurables avec π .*

Les théorèmes **6** et **7** sont des expressions géométriques de la propriété trigonométrique suivante: (Cf. H. HADWIGER [18]):

8. *Le seul angle aigu commensurable avec π dont le cosinus est un nombre rationnel est $\alpha = \pi/3$.*

Le théorème suivant dû à P. ERDÖS [12] (Voir aussi A. DELACHET [8] p. 50 et E. TROST [57]) est un exemple particulièrement typique d'énoncés d'un type nouveau en ce sens que d'hypothèses très simples résulte une conséquence inattendue et précise.

9. *Pour que les points d'un ensemble, en nombre infini, soient alignés, il suffit que, pour chaque couple d'entre eux, la longueur de leur segment soit un nombre entier.*

Il y a lieu de remarquer que cette conclusion ne subsiste pas si les points sont en nombre fini k , même très grand. On peut même, pour toute valeur de k , construire un ensemble de k points dont les distances mutuelles sont mesurées par des nombres entiers, sans qu'aucune des combinaisons de trois d'entre eux n'appartienne à une droite. De telles constructions ont été faites à maintes reprises, notamment par M. ALTWEGG [1], A. MÜLLER [40] et F. STEIGER [53].

D'après A. MÜLLER, on peut construire un ensemble dénombrable de points, dense sur une circonférence de rayon 1 et tel que la longueur du segment de chaque couple d'entre eux soit un nombre rationnel. Ce sont les points P_n de coordonnées polaires: $\rho = 1$ $\varphi = 2n\theta$ avec $\cos \theta = 4/5$.

D'après le théorème **8**, l'angle θ est incommensurable avec π ; tous les points P_n sont différents sur la circonférence de rayon 1; ils forment un ensemble dense qui est même de répartition uniforme d'après le théorème d'équipartition de H. WEYL (ce qui est toutefois sans importance pour le théorème considéré). La distance de deux points est:

$$d(P_n, P_m) = 2 \left| \sin(n - m)\theta \right| \text{ avec } \sin \theta = 3/5, \cos \theta = 4/5.$$

Elle est rationnelle par application des formules de multiplication des arcs. Dans un tel ensemble il suffit de prendre k points. Avec un choix convenable de l'unité les longueurs des segments qui joignent ces points deux à deux sont des nombres entiers et cependant aucune combinaison de trois de ces points n'appartient à une droite.

* * *

Les théorèmes du groupe suivant sont relatifs aux enveloppes et à la séparation des ensembles de points. Précisons d'abord quelques notions: un ensemble de points est convexe si, pour chaque couple de ses points, tous les points du segment joignant les points du couple appartiennent à l'ensemble.

L'enveloppe convexe d'un ensemble de points est le plus petit ensemble convexe qui le contient; il est équivalent de dire que c'est l'intersection de tous les ensembles convexes qui le contiennent.

10. *Pour qu'un point appartienne à l'ensemble convexe d'un ensemble de points, en nombre fini ou infini, il faut (et il suffit) qu'on puisse trouver un, deux ou trois points de l'ensemble dont l'enveloppe convexe contienne ce point.*

Il résulte de cet énoncé que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est la réunion des domaines triangulaires (triangles, périmètres compris) définis par toutes les combinaisons de trois points de l'ensemble. (Y compris les combinaisons avec répétition.)

11. *Pour qu'un point soit « intérieur » à l'enveloppe convexe d'un ensemble de points (non alignés), il faut et il suffit qu'on puisse trouver trois ou quatre points de l'ensemble tels que le point considéré soit intérieur à leur enveloppe convexe.*

Les énoncés **10** et **11** sont des cas particuliers, dans le plan, de théorèmes généraux établis par E. STEINITZ [54] et W. GUSTIN [17]. Cf aussi O. HANNER-H. RADSTRÖM [20] et C. V. ROBINSON [49].

Deux ensembles sont « séparables » s'il est possible de trouver une droite qui ne traverse aucun des deux et les sépare l'un de l'autre. Il est équivalent de dire qu'ils sont situés dans chacun des demi-plans limités par la droite (limite exclue). Cette propriété est caractérisée par le critère suivant établi par P. KIRCHBERGER [29]. (Cf. aussi H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]):

- 12.** *Pour que deux ensembles, fermés et bornés, soient séparables, il suffit (et il faut) qu'il en soit de même pour chacun des couples de leurs sous-ensembles respectifs dont la réunion comprend au plus quatre points.*
- 13.** *Tout ensemble de points, comprenant au moins quatre points, peut être regardé comme la réunion de deux sous-ensembles, non vides, sans point commun et non-séparables.*

Voir à ce sujet F. W. LEVI [36] et R. RADO [46].

* * *

Les propriétés suivantes gravitent autour du célèbre théorème de HELLY. Les nombreuses variantes de même type, concernant en général des « ovales », forment une théorie caractéristique de la géométrie combinatoire convexe. On appellera « ovale » (Eibereich) un ensemble de points convexe, borné et fermé.

- 14.** *Pour que tous les ovales d'un ensemble (en nombre fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux.*

C'est l'application au plan du théorème connu de HELLY. Cf. E. HELLY [21], J. RADON [48], D. KÖNIG [35]... etc. Des exemples simples montrent qu'il est impossible de remplacer les combinaisons de trois ovales par des couples; sauf s'il existe des conditions supplémentaires sur la forme des ovales.

C'est le cas de l'énoncé suivant:

- 15.** *Pour que tous les rectangles (ou les parallélogrammes), à côtés respectivement parallèles, d'un ensemble (en nombre*

fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.

En déplaçant par translation un ovale qui n'est pas un parallélogramme, on peut obtenir trois ovales n'ayant pas de point commun mais tel que chaque couple de ces trois ovales aient au moins un point commun. Toutefois cela est impossible pour des parallélogrammes. L'énoncé **15**, légèrement modifié, est donc une propriété caractéristique des parallélogrammes. Cf. à ce sujet B. Sz.-NAGY [41].

L'application à la droite du théorème de Helly est un cas particulier du théorème **15**.

16. *Pour que les segments, appartenant à une même droite, d'un ensemble (en nombre fini ou infini) aient (au moins) un point commun, il suffit (et il faut) qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.*

On peut facilement, et en vue de nombreuses applications, établir pour la circonférence un théorème du même type que celui de Helly. On y remplace les ovales par des arcs « fermés », c'est-à-dire extrémités comprises, appartenant, bien entendu, à une même circonférence.

17. *Pour que les arcs, inférieurs à une demi-circonférence, d'un ensemble (en nombre fini ou infini), appartenant à une même circonférence, aient (au moins) un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux.*

La condition de longueur des arcs est essentielle, car la propriété n'est plus vraie pour un ensemble de demi-circonférences. Il suffit, en effet, de considérer les quatre demi-circonférences limitées par deux couples de points diamétralement opposés. Elles n'ont pas de point commun et cependant chacune des combinaisons de trois d'entre elles en a au moins un.

De même la propriété n'est plus vraie, sans modifications, pour des couples d'arcs. Il suffit de considérer le découpage d'une circonférence en trois arcs égaux: ceux-ci sont sans point commun et cependant chaque couple a un point commun.

La propriété peut devenir vraie pour les couples par une limitation plus stricte de la longueur des arcs :

18. *Pour que les arcs, inférieurs à un tiers de circonférence, d'un ensemble (en nombre fini ou infini), appartenant à une même circonférence, aient (au moins) un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque couple d'entre eux.*

On peut encore énoncer une propriété analogue, de conclusion un peu différente, sans condition de limitation de longueur des arcs.

19. *Pour qu'il existe (au moins) un diamètre qui coupe tous les arcs d'un ensemble, appartenant à une même circonférence, il suffit que chaque couple de ces arcs ait (au moins) un point commun.*

Il est équivalent de dire que si cette condition suffisante est remplie, on peut trouver deux points diamétralement opposés tels que tout arc de l'ensemble contienne (au moins) l'un des deux. Des théorèmes analogues ont été établis, entre autres, par C. V. ROBINSON [49] et A. HORN-A. VALENTINE [25]. De belles applications, signalées ci-dessous, ont été données par P. VINCENSINI [59].

20. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à être contenu dans l'intersection d'un ensemble d'ovales il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

21. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à rencontrer tous les ovales d'un ensemble, il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

22. *Pour qu'on puisse trouver une translation amenant un ovale donné à contenir tous les ovales d'un ensemble (ou leur réunion), il suffit que, pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble il existe une telle translation.*

Ce sont des applications au plan de variantes plus générales du théorème de Helly énoncées par P. VINCENSINI [58] et

V. L. KLEE jr. [32] pour des hyper-espaces. Les théorèmes ne sont vrais, dans le plan, que pour des déplacements de translation et ne s'appliquent plus pour des rotations.

Voici notamment, un contre-exemple du théorème **21**. On considère un ensemble de n cercles ($n > 2$) dont les centres ont

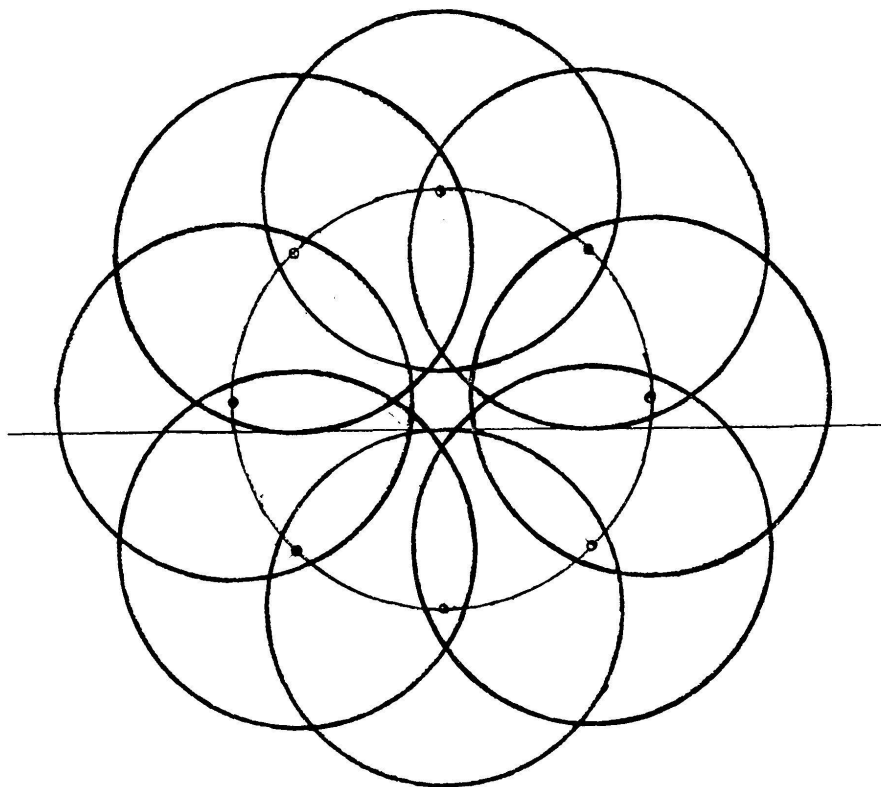


FIG. 3

pour coordonnées polaires: $\rho = 1$ et $\varphi = 2k\pi/n$ ($k = 1, \dots, n$) et dont les rayons sont $r = \cos^2(\pi/n)$ si n est pair et

$$r = \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/2n) - 1$$

si n est impair. On peut alors vérifier qu'il est toujours possible, par un déplacement, non reductible à une translation, d'amener un segment de droite de longueur 2 (ce qui est un ovale aplati) à traverser chacune des combinaisons de $n - 1$ cercles; mais qu'il est impossible de lui faire traverser les n cercles en même temps.

La figure 3 illustre cet exemple pour $n = 8$.

23. *Pour que, par un point quelconque du plan, on puisse toujours faire passer une droite rencontrant tous les ovales d'un*

ensemble, il suffit que chaque couple de ces ovals ait (au moins) un point commun.

- 24.** *Pour que, parallèlement à une direction quelconque du plan, on puisse toujours mener une droite rencontrant tous les ovals d'un ensemble, il suffit que chaque couple de ces ovals ait (au moins) un point commun.*

Ces deux énoncés sont aussi des cas particuliers, pour le plan, de théorèmes plus généraux de A. HORN [24] et de V. L. KLEE jr [30]. Ils donnent des exemples de propriétés entraînées par « une condition suffisante de Helly » vérifiée par des couples au lieu de combinaisons de trois ovals.

On peut aussi se demander s'il est possible d'obtenir un théorème analogue à celui de Helly en remplaçant la recherche d'un point commun par celle d'une sécante commune. L'existence d'une droite rencontrant tous les ovals d'un ensemble peut-elle résulter de l'existence d'une sécante commune à chaque combinaison d'un certain nombre h de ces ovals ?

Une telle propriété n'existe pas. Et c'est ainsi que L. A. SANTALÓ [50] a montré qu'il est possible de construire un ensemble de n ovals, sans sécante commune et tel cependant qu'il en existe une pour chaque combinaison de $n - 1$ de ces ovals.

C'est aussi ce que prouve l'exemple indiqué à propos de l'énoncé **21**. On peut cependant obtenir des théorèmes de ce genre en ajoutant des conditions supplémentaires pour la forme et pour la position des ovals. C'est ainsi que L. A. SANTALÓ [50] a démontré que, pour un ensemble de rectangles à côtés parallèles, il existe une sécante commune s'il en existe une pour chaque combinaison de six de ces rectangles. C'est aussi le cas de l'énoncé suivant :

- 25.** *Pour qu'il existe une droite « montante » traversant tous les rectangles à côtés parallèles d'un ensemble, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois rectangles de l'ensemble.*

Par droite « montante » on entend une droite qui a un coefficient angulaire positif par rapport à un système d'axes parallèles aux côtés des rectangles, comme l'indique la figure 4.

Dans l'exemple de la figure 3 qui prouve qu'il n'existe pas, dans le cas général, de nombre de Helly pour une condition suffisante d'existence d'une sécante commune à un ensemble d'ovales, on peut remarquer que les ovales se recouvrent partiellement les uns les autres. On peut se demander si cette circonstance n'est pas trop particulière et étudier le cas où les ovales n'ont, deux à deux, aucun point commun. A cette question qui a été posée par V. L. KLEE [33] la réponse est négative.

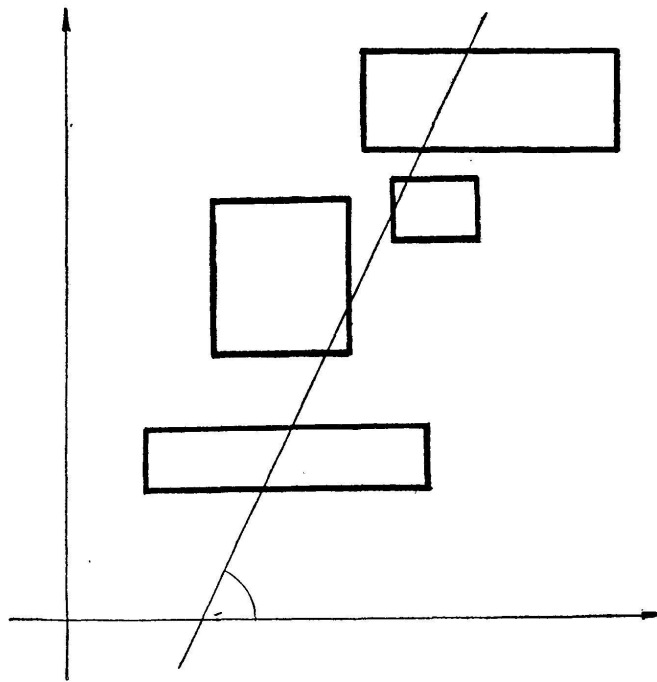


FIG. 4

Pour le montrer, on peut construire une rosace de segments circulaires. Sur $2n$ ($n > 1$) circonférences concentriques K_i (i de 1 à $2n$) de centre Z et de rayons R_i ($0 < R_i \leq R_{i+1}$) on construit des couples de segments S_i et S_i^* symétriques par rapport à Z . Chaque segment est défini par les coordonnées polaires des points de l'arc qui le limite sur le cercle R_i :

$$S_i \quad \rho = R_i; (i - n + 1) \pi/2n \leq \varphi \leq (i + n - 1) \pi/2n$$

$$S_i^* \quad \rho = R_i; (i + n + 1) \pi/2n \leq \varphi \leq (i + 3n - 1) \pi/2n.$$

Cette rosace vérifie les propriétés suivantes:

- A. En choisissant convenablement l'accroissement des rayons R_i , on peut construire des segments sans point commun deux à deux. La figure 5 en donne un exemple pour $n = 2$.

- B. Il n'existe aucune droite traversant les $4n$ segments. Un diamètre d'angle polaire compris dans l'intervalle $0, \pi/2n$ ne rencontre aucun des deux segments S_n et S_n^* et même les sépare. Il en résulte que l'un au moins de ces segments n'est pas traversé par une droite parallèle à ce diamètre. Par des rotations d'angle $\pi/2n$ on complète le raisonnement.

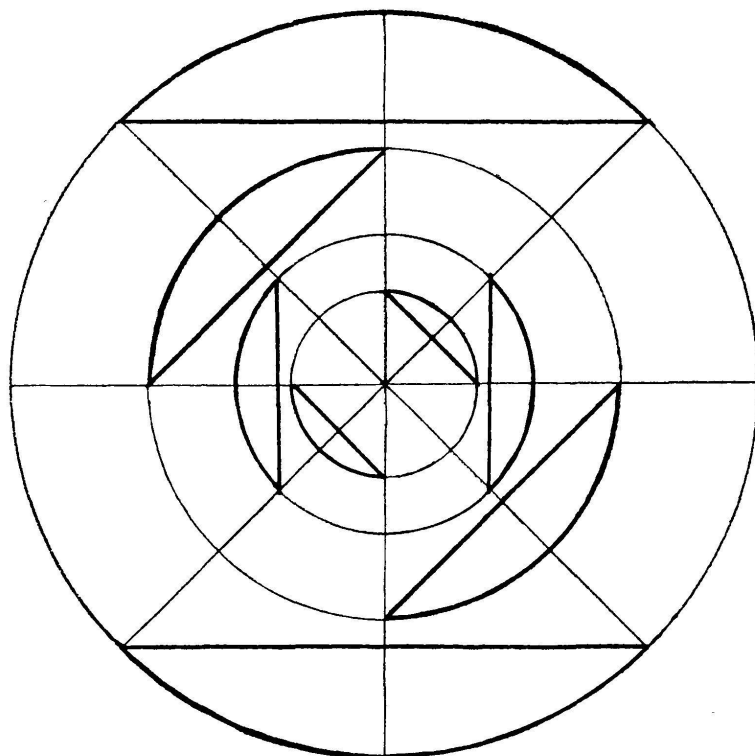


FIG. 5

- C. (Quels que soient les R_i) il n'existe aucun point commun aux $4n$ segments. C'est une conséquence évidente de B.
- D. Si tous les R_i sont égaux à R , pour chaque combinaison de $2n - 1$ couples de segments, il existe au moins un couple de points diamétralement opposés qui leur soit commun. Il suffit de considérer tous les couples de segments sauf S_n et S_n^* . Les deux points d'angle polaire 0 et π leurs sont communs. Les rotations d'angle multiples de $\pi/2n$, qui échangent les segments, montrent qu'il en est de même pour chaque combinaison de $2n - 1$ couples.
- E. Si tous les R_i sont égaux à R , il n'existe aucun couple de points diamétralement opposés appartenant aux $2n$ couples de segments. C'est une conséquence évidente de B.

- F. De D on déduit que toute combinaison de $2n - 1$ couples de segments est traversée par un diamètre. Mais cette propriété reste vraie même si les rayons ne sont plus égaux et, en particulier, lorsque les segments pris, deux à deux, n'ont pas de point commun (comme dans la propriété A).
- G. Si tous les R_i sont égaux à R , pour chaque combinaison de $2n - 1$ segments, il existe deux points tels que chacun de ces segments contienne au moins l'un des deux points. C'est une conséquence de D.
- H. On ne peut pas trouver de couple de points tel que chacun des $4n$ segments contienne au moins l'un des points de ce couple. C'est une conséquence évidente de B.

Les propriétés A, B et F fournissent une réponse négative à la question posée ci-dessus. La même rosace permet de montrer l'impossibilité de diverses propriétés analogue à celle de Helly.

A l'occasion d'un travail de L. A. SANTALÓ [51], Th. MOTZKIN a donné un contre-exemple de l'énoncé suivant: pour que tous les couples d'un ensemble de couples d'ovales aient au moins un point commun, il suffirait qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison d'un certain nombre h de ces couples. C'est également ce que montre l'exemple de la rosace; propriétés D et E (dans le cas de rayons égaux).

V. L. KLEE jr. [31] a cherché à trouver un nombre h de Helly vérifiant l'énoncé suivant: Pour que chacun des ovales d'un ensemble contienne au moins l'un des deux points d'un couple il suffirait qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de h de ces ovales. L'exemple de la rosace montre encore qu'il n'en existe pas. Il suffit de considérer les propriétés G et H.

On ne sait pas encore s'il existe un nombre h de Helly dans le cas d'un ensemble d'ovales « congruents » (ou déduits de l'un d'eux par translation), deux à deux sans point commun, et dont on cherche s'ils ont une sécante commune, s'il en est ainsi pour chaque combinaison de h de ces ovales. On peut d'abord se poser la question pour des cercles; l'existence de h apparaît alors plausible, mais on n'en a pas de preuve. Il faudrait en tout cas, que h soit au moins égal à 5 ainsi que le montre la figure 6.

En revanche, on a pu établir le théorème suivant pour des ensembles d'ovales homothétiques :

- 26.** *Pour que, relativement à un ensemble d'ovales homothétiques, il existe un système de quatre droites formant un rectangle, telles que chaque ovale soit traversé par au moins l'une d'entre elles, il suffit que, pour chaque combinaison de quatre ovales de l'ensemble, il existe (au moins) une sécante commune.*

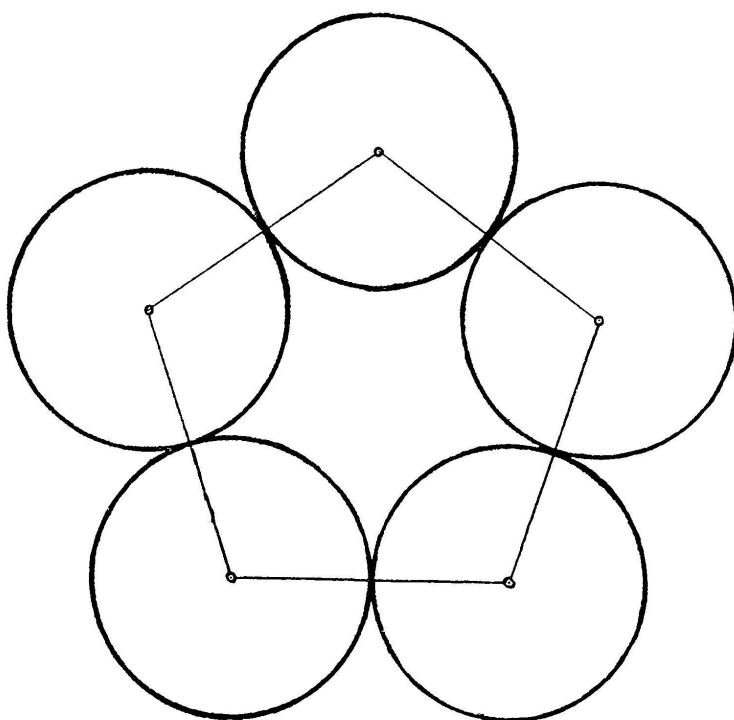


FIG. 6

Nous terminerons ce groupe de théorèmes en indiquant un énoncé du type de Helly, découvert par P. VINCENSINI [59]. On dira qu'un ensemble d'ovales est « totalement séparable » lorsqu'il existe une direction de droite, telle que toute droite parallèle à cette direction ne traverse au plus qu'un seul ovale de l'ensemble. On peut alors tracer, dans le plan, des bandes à bords parallèles à cette direction, deux à deux sans point commun, et telles que chaque bande contienne un et un seul ovale (comme l'indique la figure 7).

- 27.** *Pour qu'il existe une droite traversant tous les ovales d'un ensemble totalement séparable, il suffit qu'il en soit ainsi pour chaque combinaison de trois ovales de l'ensemble.*

La propriété avait été établie par P. VINCENSINI pour des combinaisons de $h = 4$ ovals. V. L. KLEE jr. [34] a montré qu'elle était vraie pour h seulement égal à trois. Cette propriété a pour cas particulier le théorème suivant énoncé par L. A. SANTALÓ [50] (Voir aussi H. RADEMACHER-I. J. SCHÖENBERG [44]):

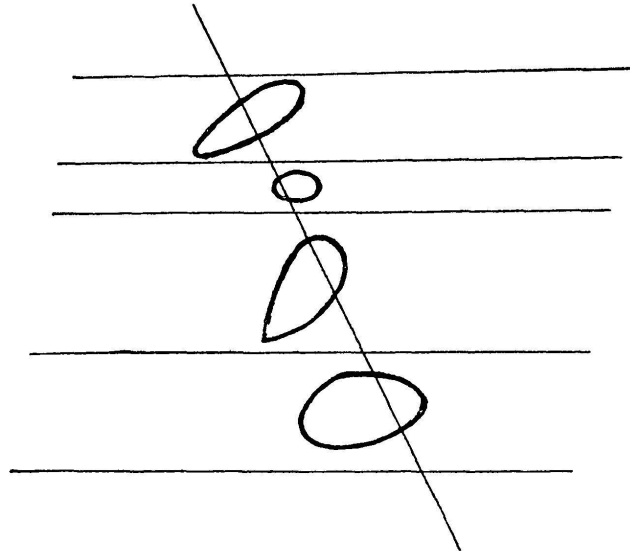


FIG. 7

Pour qu'il existe une sécante commune à un ensemble de segments de droites, strictement parallèles entre eux (donc totalement séparables) il suffit que la propriété soit vraie pour chaque combinaison de trois segments de l'ensemble.

Au sujet du théorème 27, on peut modifier la condition de la séparation totale pour des ovals suffisamment clairsemés, ce qui peut être exprimé par les grandeurs des angles apparents comme l'indiquent la figure 8 et le théorème suivant.

- 28.** *Pour qu'un ensemble d'ovals soit totalement séparable, il suffit que de tout point du plan on ne puisse voir plus d'un ovale sous un angle apparent au moins égal à $\pi/3$ et que, pour chaque combinaison de quatre ovals de l'ensemble, il existe (au moins) une sécante commune.*

* * *

On termine par quelques énoncés, plus ou moins apparentés au théorème connu de H. W. JUNG [26] sur la grandeur de

l'enveloppe circulaire d'un ensemble de points de diamètre donné. Précisons d'abord quelques notions :

Un ensemble de points est « borné » s'il peut être recouvert par un cercle fermé.

En vue des théorèmes suivants nous dirons qu'un ensemble de droites est « borné » lorsqu'il ne contient pas de couple de droites parallèles, et que les points d'intersection de tous les couples de droites forment un ensemble borné.

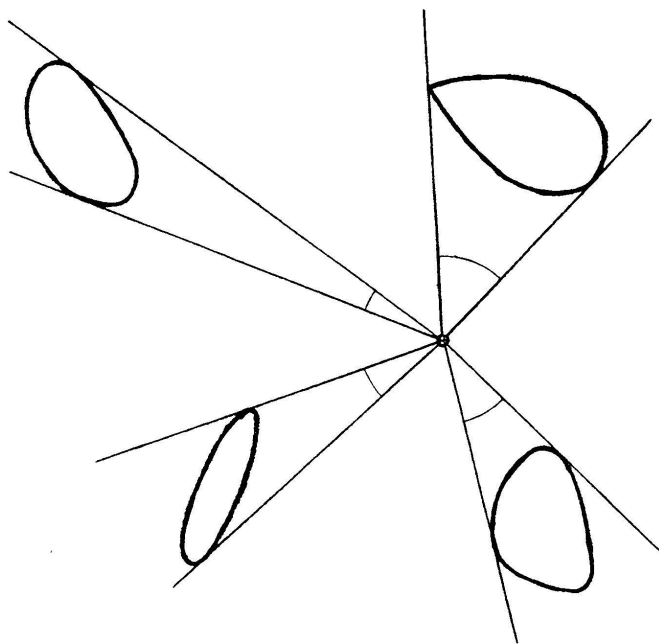


FIG. 8

Le « rayon de recouvrement » d'un ensemble borné de points est le rayon du plus petit cercle (fermé) qui contient tous les points de l'ensemble. Par analogie on appellera « rayon d'intersection » d'un ensemble borné de droites, le rayon du plus petit cercle (fermé) coupé par toutes les droites de l'ensemble.

Le « diamètre » d'un ensemble borné de points est la limite supérieure des distances de ses couples de points. Par analogie, on appellera diamètre d'un ensemble borné de droites, le diamètre de l'ensemble des points d'intersection.

- 29.** *Pour qu'il existe un cercle de rayon R recouvrant tous les points d'un ensemble borné il suffit que, pour chaque combinaison de trois de ces points, il existe au moins un cercle de rayon R la recouvrant.*

- 30.** *Pour qu'il existe un cercle de rayon R rencontrant toutes les droites d'un ensemble borné, il suffit que, pour toute combinaison de trois de ces droites, il existe au moins un cercle de rayon R les rencontrant.*

Ce sont des conséquences du théorème **21**.

- 31.** *Le rayon de recouvrement d'un ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, est au plus égal à $1:\sqrt{3}$.*

C'est un cas particulier, pour le plan, du théorème de JUNG. H. RADEMACHER et O. TŒPLITZ [45] en donnent un exposé détaillé.

- 32.** *Le rayon d'intersection d'un ensemble borné de droites dont le diamètre est égal à 1, est au plus égal à $1/2\sqrt{3}$.*

C'est la transformation par dualité du théorème de JUNG.

- 33.** *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$.*

- 34.** *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par un hexagone de côté $1:\sqrt{3}$.*

Un domaine qui peut recouvrir tout ensemble de points dont le diamètre est égal à 1, est appelé « couvercle » (normal). Le cercle de rayon $1/\sqrt{3}$ est le couvercle de JUNG. Le triangle équilatéral et l'hexagone circonscrits au cercle de diamètre égal à 1 sont des couvercles. L'énoncé **33** est un cas particulier pour le plan, d'un théorème établi par D. GALE [15], correspondant au théorème de JUNG. Le théorème **34** est dû à S. PÁL [42].

- 35.** *Tout ensemble borné de points dont le diamètre est égal à 1, peut être recouvert par trois ensembles de points dont les diamètres ne dépassent pas $\sqrt{3}/2$.*

C'est une forme plus précise, donnée par D. GALE [15] d'un théorème dû à K. BORSUK [5] qui exprime que, dans le plan, tout ensemble de points peut être considéré comme la réunion de trois sous-ensembles de diamètres inférieurs. K. BORSUK avait suggéré qu'un ensemble de points, dans un espace de k dimensions pourrait être décomposé en $k + 1$ sous-ensembles de diamètres inférieurs. Cette propriété a été établie pour $k = 3$ par

H. G. EGGLESTON [10]; elle n'a pas encore été démontrée pour $k > 3$.

Le théorème ci-dessus de K. BORSUK, non compris la précision de D. GALE, est aussi une conséquence, dans le cas d'un ensemble d'un nombre fini de points du plan, du théorème suivant sur le nombre de couples de points dont la distance est égale au diamètre de l'ensemble.

36. *Dans un ensemble, d'un nombre fini n de points, dont le diamètre est égal à 1, il y a au plus n couples distincts de points dont la distance est égale à 1.*

On en trouve une brève démonstration dans P. ERDÖS [13] — Cf. aussi H. HOPF et E. PANNWITZ [23].

Les relations étroites entre tous ces groupes de théorèmes sont mises en évidence par la conséquence suivante du théorème **34** énoncée sous une forme analogue à celle du théorème de Helly.

37. *Pour que, dans un ensemble de cercles de rayon égal à 1, on puisse construire un triangle équilatéral de côté égal à 1, dont chaque cercle de l'ensemble contienne au moins l'un des sommets, il suffit que chaque couple de cercles de l'ensemble ait au moins un point commun.*

On trouve dans L. FEJES-TÓTH [14] — page 97 — des énoncés analogues qui ne sont encore que partiellement démontrés.

2^{me} PARTIE

Nous donnons ci-dessous de courtes démonstrations des théorèmes qui précèdent, d'après les sources indiquées. Nous nous bornons souvent à la suite des idées. Les raisonnements ne supposent que des propositions préalables élémentaires notamment des considérations simples sur les ensembles de points.

I. On raisonne par l'absurde: on considère des points P_i vérifiant les conditions de l'hypothèse et non alignés. On peut, en effectuant éventuellement une transformation projective supposer l'un d'eux P_1 à l'infini. Les droites joignant tous les

couples de points sont, d'une part des parallèles (au moins 2) de direction P_1 , d'autre part des transversales (au moins une). Si ces transversales étaient en nombre fini, il en existerait au moins une G formant avec les parallèles un angle minimum (au plus égal à tous les autres). Elle contiendrait au moins trois points différents, soit P_i , P_k et P_j entre P_i et P_k . La droite de direction P_1 passant par P_j contiendrait au moins un point P_m de l'ensemble (différent de P_j et à distance finie). L'une des droites $P_m P_i$ ou $P_m P_k$ formerait avec les parallèles un angle aigu inférieur (strictement) à celui de G , ce qui est absurde (contraire à la construction de G ou au nombre fini de transversales) ¹.

2. C'est le transformé de **1** par dualité.

3. C'est une conséquence de **1**. Il suffit de transformer la figure par une inversion dont le pôle est un point de l'ensemble. Les circonférences passant par le pôle deviennent des droites vérifiant les conditions de **1**, donc réduites à une seule. (On continue ensuite de proche en proche.)

4. Le plus petit cercle de recouvrement (c'est-à-dire le plus petit cercle contenant tous les points de l'ensemble) contient sur son périmètre des points de l'ensemble, délimitant des arcs tous inférieurs ou égaux à des demi-circonférences. Il ne peut exister de point Q (strictement) intérieur au cercle car la symétrie relativement à la médiatrice du segment joignant Q à l'un des points précédents donnerait des points extérieurs (strictement) au cercle.

Si le nombre des points de l'ensemble est fini (supérieur à 2), on considère deux axes de symétrie dont l'angle φ est minimum. Le produit des symétries autour des axes est une rotation d'angle 2φ autour du centre du cercle, qui laisse l'ensemble invariant. Cet ensemble est donc un polygone régulier d'angle au centre φ égal à $2\pi/n$.

5. S'il existait des polygones réguliers de n sommets inscrits dans un réseau, il en existerait un de côté minimum, puisque la

¹ Cette légère modification de la démonstration met en évidence la nécessité de l'hypothèse du nombre fini d'éléments de l'ensemble de points. (Note des traducteurs.)

longueur d'un côté est égale à une expression $\sqrt{p^2 + q^2}$ (p et q entiers). Supposons construit un tel polygone $P_1 P_2 \dots P_n$ et à partir de chaque sommet, portons un vecteur défini par les équipollences :

$$\overrightarrow{P_1 P'_1} = \overrightarrow{P_2 P_3}, \quad \overrightarrow{P_2 P'_2} = \overrightarrow{P_3 P_4}, \quad \dots, \quad \overrightarrow{P_n P'_n} = \overrightarrow{P_1 P_2}$$

Les extrémités de ces vecteurs seraient encore des points du réseau et pour $n = 5$ et $n \geq 7$, ils formeraient un polygone régulier de n sommets plus petit que le précédent qui ne pourrait donc être minimum. Pour établir l'impossibilité d'inscrire un triangle régulier de côté s , il suffit de remarquer que son aire est égale à $s^2 (\sqrt{3}/4)$. Elle serait donc irrationnelle puisque s^2 serait rationnelle. Or le calcul de cette aire en fonction des coordonnées des sommets, par exemple au moyen d'un déterminant, donnerait un nombre rationnel. Il y a donc absurdité. On démontre de même l'impossibilité d'inscrire un hexagone régulier de côté s dont l'aire est $s^2 (3\sqrt{3}/2)$.

6. Pour un losange inscrit dans le réseau, d'angle aigu α et de côté s , la surface qui est égale à $s^2 \sin \alpha$ peut être exprimée en fonction des coordonnées des sommets, ce qui donne un nombre entier. La valeur de $\sin \alpha$ est donc rationnelle. D'après la propriété **8**, pour α commensurable avec π ceci n'est possible que pour α égal à $\pi/6$ ou à $\pi/2$. Le premier cas est à rejeter : par une rotation de $\pi/2$ autour d'un sommet du losange, point du réseau, on transformerait les autres sommets en de nouveaux points du réseau. Il apparaîtrait alors un triangle équilatéral inscrit, ce qui est contraire à la propriété **5**.

7. Conséquence immédiate de **8**.

8. La démonstration du théorème **5** pour les polygones réguliers dont le nombre des sommets est $n = 5$ ou $n \geq 7$, reste valable pour un réseau rectangulaire (points de coordonnées Ax et By où A et B sont des nombres fixes et x et y des entiers quelconques.) Le théorème **8** résultera de l'énoncé suivant qui est plus général : « Les seuls polygones réguliers qui peuvent être inscrits dans un réseau rectangulaire sont les triangles, les carrés et les hexagones. »

Considérons, en effet, un angle $\alpha = 2\pi(m/n)$ défini par une fraction m/n irréductible. Les formules de trigonométrie permettent de calculer en fonction rationnelle (à coefficients rationnels) de $\cos \alpha$ les nombres a_ν et b_ν tels que $\cos \nu\alpha = a_\nu$; $\sin \nu\alpha = b_\nu \sin \alpha$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Ces nombres sont donc rationnels si $\cos \alpha$ l'est. En désignant par N le dénominateur commun des $2n$ quantités a_ν et b_ν , on construit un réseau rectangulaire avec les points de coordonnées $(1/N)x$ et $(\sin \alpha/N)y$; x et y entiers. Sur une circonférence de rayon 1 ayant pour centre un point du réseau, tous les points d'angle polaire $\nu\alpha$ sont des points du réseau. Puisque $\alpha = 2\pi(m/n)$ ces points forment un polygone régulier de n sommets. Ceci n'est possible, d'après l'extension du théorème 5 aux réseaux rectangulaires, que pour n égal à 1 ou à 2 ou à 3 ou à 4 ou à 6. Comme α est aigu, il en résulte que $\alpha = \pi/3$.

9. On démontre le théorème par l'absurde: en considérant trois points non alignés A, B, C dont les distances mutuelles sont des nombres entiers et en désignant par k la plus grande des distances $d(A, B)$ et $d(B, C)$. Les distances d'un point P aux points A, B, C vérifient les relations:

$$\begin{aligned} |d(P, A) - d(P, B)| &\leq d(A, B) \\ |d(P, B) - d(P, C)| &\leq d(B, C). \end{aligned}$$

Si ces distances sont des nombres entiers, les différences des premiers membres ne peuvent prendre au plus que les valeurs $0, 1, 2, \dots, k$. Un point P est donc situé sur une des $k + 1$ hyperboles de foyers A et B et sur une des $k + 1$ hyperboles des foyers B et C. Il n'y a donc qu'un nombre fini, au plus égal à $4(k + 1)^2$, de points P possibles.

10. La condition est évidemment suffisante. Elle est manifestement nécessaire pour un ensemble d'un nombre fini de points dont l'enveloppe convexe est alors un polygone convexe (intérieur et périmètre compris) dont les sommets appartiennent à l'ensemble. Il suffit de décomposer ce polygone en triangles en joignant un de ses sommets à chacun des autres. Un point appartenant au polygone appartient à au moins un de ces

triangles (éventuellement à deux). Reste à considérer un ensemble M d'un nombre infini de points. On forme la réunion \bar{N} de toutes les enveloppes convexes des combinaisons d'un nombre fini de points de M . Cette réunion contient l'enveloppe \bar{M} de M car elle contient tous les points de M et tous les points de chaque segment joignant deux points de M . Or \bar{M} est le plus petit ensemble qui possède ces deux propriétés. Donc tout point contenu dans \bar{M} l'est dans \bar{N} et par suite dans au moins une enveloppe triangulaire de trois points de M .

11. La condition est encore évidemment suffisante. Si un point P est intérieur ¹ à l'enveloppe convexe \bar{M} d'un ensemble de points (non alignés) M , il est intérieur à un triangle (non aplati) dont les sommets appartiennent à \bar{M} . D'après la propriété **10** chacun de ces sommets appartient à l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble de trois points de M ; de sorte que le triangle appartient à l'enveloppe convexe (polygone) d'un nombre fini de points de M , qu'on peut décomposer en triangles en joignant un de ses sommets à chacun des autres. Le point P est intérieur soit à l'un de ces triangles, soit à la réunion de deux triangles adjacents (s'il est sur leur côté commun); il est donc intérieur à l'enveloppe convexe d'au plus quatre points de M .

12. La condition est évidemment nécessaire. On démontre qu'elle est suffisante par l'absurde, en considérant deux ensembles, fermés et bornés, M et N non séparables et en construisant deux sous-ensembles respectifs M' et N' également non séparables, dont la réunion comprend au plus quatre points. Si M et N ne sont pas séparables, leurs enveloppes convexes \bar{M} et \bar{N} ont au moins un point commun P ². D'après la propriété **10** on peut associer à ce point P des sous-ensembles M'' et N'' (de M et de N) de chacun trois points, dont les enveloppes convexes $\overline{M''}$ et $\overline{N''}$ contiennent P . Alors: ou l'une ou l'autre de ces enve-

¹ On remarquera la distinction entre un point qui appartient à un ensemble et un point qui est intérieur à un ensemble convexe. Dans le second cas le point est intérieur (appartient, périmètre exclu) à un triangle (non aplati) dont tous les points (périmètre inclus) appartiennent à l'ensemble convexe (Note des traducteurs).

² Si les ovals \bar{M} et \bar{N} n'ont pas de point commun, la distance de \bar{M} et \bar{N} est réalisée par deux points distincts de \bar{M} et \bar{N} . La médiatrice (Mittelsenkrechte) de ces points sépare M et N .

l'ensemble est incluse dans l'autre, par exemple $\overline{M''} \subset \overline{N''}$; ou certains des côtés de $\overline{M''}$ et $\overline{N''}$ sont des segments sécants. Dans le premier cas on peut constituer M' avec l'un des points de M'' et prendre $N' = N''$. Dans le second cas, on peut prendre pour M' et N' les extrémités de chacun de deux côtés sécants. Il est visible que, dans les deux cas, M' et N' ne sont pas séparables; leurs enveloppes convexes ont d'ailleurs des points communs.

13. Il suffit de considérer dans l'ensemble M un sous-ensemble de quatre points. Si leur enveloppe convexe n'est pas un quadrilatère (non dégénéré) l'un des points N est contenu dans l'enveloppe convexe des trois autres, et, a fortiori, dans l'enveloppe convexe de $M - N$. Les deux ensembles N et $M - N$ sont sans points communs (disjoints ou formant partition de M) et ils ne sont pas séparables. Si, au contraire, l'enveloppe convexe des quatre points est un quadrilatère (convexe) on peut prendre pour N deux sommets opposés; N et $M - N$ sont encore deux sous-ensembles sans point commun et non séparables.

14. Pour un système d'ovales en nombre fini, le théorème de Helly se déduit par récurrence sur n du lemme suivant:

Pour que k ovales ($k \geq 4$) aient un point commun, il suffit qu'il en soit ainsi pour chacune des combinaisons de $k - 1$ de ces ovales.

Appelons P_i un point contenu dans les ovales C_1, C_2, \dots, C_k sauf, peut-être dans C_i . D'après la propriété **13** les k points P_i ($i = 1, \dots, k$) peuvent être répartis en deux ensembles $M' = (P_{i_1}, \dots, P_{i_m})$ et $M'' = (P_{j_1}, \dots, P_{j_n})$ sans point commun et dont les enveloppes convexes $\overline{M'}$ et $\overline{M''}$ ont un point commun P_0 . Mais alors tout point de $\overline{M'}$ appartient aux ovales sauf peut-être à C_{i_1}, \dots, C_{i_m} et tout point de $\overline{M''}$ appartient aux ovales sauf peut-être à C_{j_1}, \dots, C_{j_n} . Le point P_0 qui appartient à $\overline{M'}$ et à $\overline{M''}$ appartient donc à tous les ovales, sans exception.

Pour un ensemble d'ovales en nombre infini, on raisonne par l'absurde. S'ils n'avaient pas de point commun, à tout point P d'un ovale C_1 , on pourrait faire correspondre au moins un ovale C_i ne contenant pas P ni même aucun point d'un cercle de

centre P et de rayon convenable. Mais d'après le théorème de Heine-Borel, on pourrait, dans tous ces cercles, en choisir un nombre fini qui recouvriraient l'ovale C_1 . A ces cercles correspondraient des ovals C_i , en nombre fini, formant avec C_1 un ensemble d'ovales, en nombre fini, vérifiant les conditions suffisantes énoncées, et cependant sans point commun.

15. Le théorème **14** étant acquis, il suffit d'établir que trois rectangles, à côtés parallèles, R_1, R_2, R_3 ont nécessairement un point commun lorsqu'il en est ainsi pour chacun de leurs trois couples. On prend des axes parallèles aux côtés des rectangles et on appelle x_i, y_i ($i = 1$ ou 2 ou 3) les coordonnées d'un point P_i commun aux deux rectangles d'indices différents de i . Les points P_i et P_j , ainsi que le segment qui les joint et le rectangle de côtés parallèles aux axes qui a ce segment pour diagonale sont contenus dans le rectangle R_k (k différent de i et j). Donc tout point P de coordonnées x et y appartient à R_k lorsque x est compris entre x_i et x_j et y compris entre y_i et y_j . On peut choisir les indices de telle sorte que: $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ et $y_i \leq y_j \leq y_k$ (i, j, k différents). Alors le point P de coordonnées x_2 et y_j vérifie les conditions précédentes pour qu'il appartienne à chacun des rectangles, donc aux trois.

16. Ce théorème est un cas particulier du précédent en considérant des rectangles aplatis sur une même droite.

17. C'est une conséquence de la propriété **14**. Il suffit de considérer les segments circulaires (inférieurs à un demi-cercle) qui ont pour bases les arcs de l'ensemble. Ce sont des ovals qui ont un point commun s'il en est ainsi pour chaque combinaison de trois d'entre eux. L'existence d'un point commun est équivalente à la même propriété pour leurs arcs.

18. C'est une conséquence de la propriété **16**. Si des arcs inférieurs au tiers de la circonférence ont au moins un point commun avec l'un d'eux, C_i , aucun ne contient le point I diamétralement opposé au milieu de C_i . En coupant la circonférence en I et en la développant sur une droite, on est ramené à l'existence de points communs à des segments de cette droite.

19. On considère une droite orientée $G(\alpha)$ passant par le centre de la circonférence et d'angle α avec une direction fixe. En projetant orthogonalement sur $G(\alpha)$ les arcs considérés, on obtient des segments (dont certaines parties peuvent être obtenues deux fois) dont chaque couple a (au moins) un point commun. D'après la propriété **16**, ils ont une intersection $D(\alpha)$, peut-être réduite à un point, mais qui n'est pas vide. Lorsqu'on passe de $D(\alpha)$ à $D(\alpha + \pi)$, les abscisses (relativement au centre du cercle) des points de cette intersection prennent des valeurs opposées. Comme ces abscisses varient de façon continue en fonction de α , il existe une valeur α_0 pour laquelle une de ces abscisses est nulle; c'est-à-dire que le centre est alors commun à tous les segments et la droite projetante $G(\alpha_0 + \pi/2)$ est un diamètre qui rencontre tous les arcs.

Les énoncés **20** à **28** se déduisent par des transformations géométriques convenables des théorèmes **14**, **16**, **17**, **19**.

20-21-22. La position d'un ovale A qui se déplace par translation est caractérisée par celle d'un point P invariablement lié à A . On démontre aisément que le point P décrit un ovale B_1^* ou B_2^* ou B_3^* lorsque A se déplace par translation de toutes les façons possibles en restant contenu dans un ovale B , ou en rencontrant B , ou en contenant B . Cette association des ovales B^* au déplacement de A , ramène les énoncés **20** ou **21** ou **22** au théorème **14**.

23. En projetant par rapport à un point O arbitraire les ovales d'un ensemble, vérifiant la condition suffisante énoncée, sur une circonférence de centre O , on obtient un ensemble d'arcs vérifiant la condition suffisante du théorème **19**. Il existe un diamètre qui les coupe tous et la droite qui le porte coupe tous les ovales.

24. Une projection orthogonale sur une droite quelconque des ovales d'un ensemble, vérifiant la condition suffisante énoncée, les transforme en segments vérifiant la condition suffisante du théorème **16**. Il existe un point commun à tous ces segments et la droite projetant ce point coupe tous les ovales.

25. Lorsque, parmi les rectangles, il en existe deux qui ne sont traversés que par une seule droite « montante », cette

sécante unique rencontre, en raison de l'hypothèse, tout autre rectangle et c'est une sécante commune.

Si cette condition particulière n'est pas réalisée, on peut d'abord établir la propriété pour un ensemble d'un nombre fini de rectangles. On mène deux parallèles orientées, distinctes, à l'une des directions des côtés. On repère une droite montante par les abscisses de ses points d'intersection avec ces parallèles et on lui fait correspondre biunivoquement le point qui, dans un plan auxiliaire, a ces abscisses pour coordonnées cartésiennes. A l'ensemble des droites montantes qui traversent un rectangles correspond ainsi, dans le plan auxiliaire, un ensemble de points qui est manifestement convexe, fermé mais non borné. Chaque combinaison de trois de ces domaines a au moins un point commun à distance finie (correspondant à la sécante commune aux trois rectangles correspondants). Pour un ensemble d'un nombre fini de rectangles on peut tracer, dans le plan auxiliaire, un cercle contenant tous les points communs aux combinaisons de trois des domaines. Ses intersections avec les domaines sont des ovales qui vérifient la condition suffisante du théorème 14. Ils ont donc un point commun auquel correspond une sécante commune à tous les rectangles.

Dans le cas d'un ensemble de rectangles en nombre infini, on pourrait utiliser une variante plus précise du théorème 14. On remarque seulement qu'en conséquence de ce qui vient d'être démontré, chaque combinaison de quatre rectangles de l'ensemble a au moins une sécante commune.

A toute droite montante on fait correspondre sur une circonférence auxiliaire le point dont l'angle polaire φ est égal à l'angle de la droite avec les parallèles orientées considérées. A tout couple de rectangles correspond l'ensemble des droites montantes qui les rencontrent, et, par suite, un arc de la circonférence inférieur au tiers de celle-ci. Dans l'ensemble de ces arcs, tout couple a au moins un point commun, puisqu'il correspond à une combinaison de quatre rectangles. C'est la condition suffisante du théorème 18; les arcs ont donc un point commun auquel correspond une direction telle que chaque couple de rectangles ait une sécante commune parallèle à cette direction.

Il suffit alors de projeter parallèlement à cette direction les

rectangles de l'ensemble sur une transversale. On obtient des segments pour lesquels chaque couple de segments a un point commun au moins. C'est la condition suffisante du théorème **16**; il y a donc un point commun à tous ces segments et sa projetante est une sécante commune à tous les rectangles.

26. Sur une circonférence où a été fixé un point P , on fait correspondre biunivoquement à chaque direction de droite dans le plan, le deuxième point d'intersection avec la circonférence de la parallèle menée par P à cette direction. A l'ensemble des sécantes communes à deux ovals correspond ainsi un arc de la circonférence. Aux couples d'un ensemble d'ovales vérifiant la condition du théorème, correspond un ensemble d'arcs tel que tout couple d'entre eux ait au moins un point commun; ce qui est la condition suffisante du théorème **19**. Il existe donc un diamètre qui coupe tous les arcs et à ses extrémités correspondent deux directions orthogonales telles, que pour chaque couple d'ovales, il existe au moins une sécante commune parallèle à une de ces deux directions. Les ovals étant homothétiques entre eux, on mène à l'un d'eux les deux couples de tangentes (ou de droites d'appui) respectivement parallèles aux directions déterminées. Tout autre ovale de l'ensemble, au moins égal (dans un rapport d'homothétie au moins égal à 1), est nécessairement traversé par une de ces quatre droites.

La propriété est alors démontrée lorsqu'il existe dans l'ensemble un ovale minimum. Sinon on peut la démontrer par quelques considérations supplémentaires sur les conditions de convergence des ovals, en grandeur et en position.

27. On considère d'abord toutes les droites qui traversent deux ovals A et B de l'ensemble. Les angles qu'elles font avec la direction de séparation ont respectivement des déterminations φ qui sont toutes les valeurs comprises, au sens large, entre deux d'entre elles: $\alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2$ et $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < \pi$ puisqu'elles ne comprennent ni 0 ni π . Cet ensemble, assimilable à un segment de droite, intérieur à un segment de longueur π , sera désigné par (AB) .

Supposons, au moins provisoirement, que chaque couple des segments (AB) a au moins un point (ou une valeur) commun.

C'est la condition suffisante du théorème **16** et il y a une valeur φ_0 (intérieure à l'intervalle $0, \pi$) commune à tous les segments ou intervalles (AB) . C'est dire que pour chaque couple d'ovales il y a une sécante commune de direction φ_0 .

Projetons les ovales de l'ensemble parallèlement à la direction φ_0 sur une droite de séparation. Les ovales se projettent suivant des segments et chaque couple de ces segments a un point commun.

En appliquant à nouveau le théorème **16**, on en déduit que tous ces segments ont un point commun P_0 et la projetante (de direction φ_0) menée par P_0 rencontre tous les ovales de l'ensemble.

Reste à prouver la supposition précédente, c'est-à-dire que, dans un ensemble d'ovales vérifiant les conditions de l'énoncé, il existe une valeur commune à tout couple d'intervalles $(A_1 A_2)$ et $(B_1 B_2)$ défini par deux couples d'ovales A_1 et A_2 , B_1 et B_2 . (C'était la condition de P. VINCENSINI: existence d'une sécante commune à quatre ovales). Cette existence résulte des hypothèses lorsque les deux couples d'ovales ont un ovale commun, par exemple, A et B , B et C ; puisqu'il existe une sécante commune aux trois ovales A , B et C .

Pour deux couples formés de quatre ovales distincts, on raisonne par l'absurde. Si les deux segments $(A_1 A_2)$ et $(B_1 B_2)$ intérieurs au segment $0, \pi$ étaient sans point commun, il existerait un segment intermédiaire entre eux. Si φ' est une valeur intérieure à ce segment, il existe au moins une droite de direction φ' séparant A_1 de A_2 et une autre séparant B_1 de B_2 . Ces deux droites parallèles séparent de plus un autre des couples constitués avec A_1, A_2, B_1, B_2 , soit $A_1 B_2$. Le segment $(A_1 B_2)$ a des points communs avec le segment $(A_1 A_2)$ puisque les couples A_1, B_2 et A_1, A_2 ont un ovale commun. Il en a aussi avec le segment $(B_1 B_2)$. Il devrait donc contenir tout le segment intermédiaire précédent et, en particulier la valeur φ' . Il y aurait donc une sécante commune au moins à A_1 et B_2 de direction φ' ce qui est contraire à l'hypothèse puisque la direction φ' sépare A_1 et B_2 .

28. On peut appliquer la transformation utilisée dans la démonstration du théorème **26**. On est ramené à comparer des

arcs inférieurs à un tiers de circonférence, ayant deux à deux des points communs. D'après la remarque faite dans la démonstration du théorème **18**, ils laissent à découvert un point de la circonférence.

29. C'est un cas particulier de **21**.

30. En remplaçant les droites par des segments de longueur suffisante, on est ramené au théorème **21**.

31. En raison du théorème **29**, il suffit d'établir la propriété pour un ensemble de trois points. Si ceux-ci forment un triangle (éventuellement aplati) qui a un angle obtus le cercle de recouvrement a pour diamètre le côté opposé à l'angle obtus, qui est le plus grand donc égal au diamètre 1. Le rayon de recouvrement est alors égal à $1/2$.

Si les trois points forment un triangle (non aplati) qui a ses trois angles aigus le cercle de recouvrement est le cercle circonscrit, dont le rayon est la valeur commune de $a/2 \sin \alpha$ où a est la longueur d'un côté et α l'angle opposé. Dans tout triangle il y a un angle au moins égal à $\pi/3$. Donc $a \leq 1$; $\sin \alpha \geq \sqrt{3}/2$ donc $a/2 \sin \alpha \leq 1/\sqrt{3}$.

32. Il suffit encore, en raison du théorème **30**, d'établir la propriété pour un ensemble de trois droites de diamètre égal à 1. Elles forment un triangle de périmètre au plus égal à 3 qui est circonscrit au plus petit des cercles sécants. Comme le triangle équilatéral de périmètre $6r \sqrt{3}$ est le triangle de plus petit périmètre circonscrit au cercle de rayon r on en déduit $6r\sqrt{3} \leq 3$ et $r \leq 1/2\sqrt{3}$.

33. L'ensemble étant borné, on peut construire deux triangles équilatéraux S et S^* circonscrits, à côtés respectivement parallèles et disposés symétriquement; chacun de leurs côtés contenant au moins un point de l'ensemble. En menant par un point intérieur à chacun des triangles des perpendiculaires à leurs côtés, on obtient des segments dont les sommes sont respectivement égales aux hauteurs des triangles S et S^* , d'après une propriété bien connue de géométrie élémentaire. Mais chacune des sommes de deux de ces segments opposés est au plus égale

au diamètre de l'ensemble qui est égal à 1. La somme des hauteurs des deux triangles est donc au plus égale à trois. L'une d'elles est au plus égale à $3/2$ et le côté du triangle correspondant est au plus égal à $\sqrt{3}$.

34. En reprenant la démonstration du théorème **33**, on voit que les longueurs des côtés des triangles équilatéraux circonscrits S et S^* sont des fonctions continues de la direction de l'un des côtés, choisi comme base. Après une rotation d'angle π de cette direction, la longueur des côtés de S se change en celle des côtés de S^* . Il y a donc une position pour laquelle ces deux triangles sont égaux. Leur intersection dans laquelle est contenu l'ensemble de diamètre égal à 1, est un hexagone convexe, éventuellement dégénéré, qui a un centre de symétrie et des côtés parallèles dont la distance est au plus égale à 1. Cette intersection est contenue, entièrement, dans un hexagone régulier, de même centre de symétrie, de côtés parallèles de distance égale à 1. Il contient l'ensemble considéré et la longueur de ses côtés est $1/\sqrt{3}$.

35. C'est une conséquence de **34**. Du centre de l'hexagone régulier ainsi circonscrit à un ensemble de diamètre égal à 1, il suffit d'abaisser des perpendiculaires sur trois de ses côtés non consécutifs. On décompose ainsi l'hexagone en trois pentagones égaux, chacun de diamètre égal à $\sqrt{3}/2$, dont la réunion recouvre bien l'ensemble considéré.

36. La propriété est évidente pour $n = 3$. On la démontre, par récurrence sur n , pour un ensemble de points P_1, P_2, \dots, P_n en nombre au moins égal à quatre, de diamètre égal à 1. On trace tous les segments $P_i P_k$ de longueur effectivement égale à 1. Si, à chaque point P_i correspondent au plus deux segments ainsi tracés, qui l'ont pour origine commune, le nombre de tous ces segments est bien au plus égal à n . Sinon, il existe un point P_1 qui est une extrémité commune de trois segments $P_1 P_i, P_1 P_j, P_1 P_k$ de longueur égale à 1, et dont les autres extrémités sont de distances mutuelles au plus égales à 1. Les angles de ces segments, pris deux à deux, sont inférieurs à $\pi/3$ et l'un des segments noté $P_1 P_j$ est contenu dans l'angle aigu des deux autres. On

vérifie alors aisément que tout point Q du plan différent de P_1 , qui est à une distance égale à 1 de P_j est à une distance supérieure à 1 d'au moins l'un des trois points P_1, P_i, P_k et par suite n'appartient pas à l'ensemble. En supprimant P_j dans l'ensemble considéré on n'y supprime qu'un seul segment de longueur 1, d'où la récurrence.

De cette démonstration, il résulte encore que dans un ensemble de n points, de diamètre égal à 1, il y a toujours au moins un point P_1 à une distance égale à 1 de deux autres points au plus, P_i et P_j . Le théorème de BORSUK qui est évident pour $n = 3$ s'en déduit encore par récurrence sur n . Car on peut décomposer l'ensemble des $n - 1$ points, obtenu par suppression de P_1 en trois sous-ensembles de diamètre inférieur à 1. L'un d'entre eux ne contient ni P_i ni P_j ; en lui adjoignant P_1 , il reste encore de diamètre inférieur à 1, et on obtient ainsi une décomposition de l'ensemble primitif.

37. Puisque les cercles de rayon 1 ont deux à deux des points communs, leurs centres forment un ensemble de diamètre au plus égal à 2. D'après **34** on peut le recouvrir par un hexagone de côté $2/\sqrt{3}$. Les milieux des côtés d'un triangle équilatéral inscrit dans cet hexagone forment un triangle équilatéral de côté égal à 1. Tout point de l'hexagone et, en particulier, tout centre d'un cercle de l'ensemble est à une distance au plus égale à 1 d'au moins l'un des sommets de ce triangle.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] ALTWEGG, M. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, 7, 56-58, 1952.
- [2] ANNING, N. H. and P. ERDÖS. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 598-600, 1945.
- [3] BALASUBRAMANIAN, N. A theorem on sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 19, 839, 1953.
- [4] BERNHEIM, B. and Th. MOTZKIN. A criterium for divisibility of n -gons into k -gons. *Comment. Math. Helvetici*, 22, 93-102, 1949.
- [5] BORSUK, K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, 20, 177-190, 1933.
- [6] DE BRUIJN, N. G. and P. ERDÖS. On a combinatorial problem. *Indagationes Math.*, 10, 421-423, 1948.

- [7] COXETER, H. S. M. A problem of collinear points. *Amer. Math. Monthly*, 55, 26-28, 1948.
- [8] DELACHET, A. *La géométrie contemporaine*. Paris 1950, 128 S.
- [9] DIRAC, G. A. Collinearity properties of sets of points. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (2), 2, 221-227, 1951.
- [10] EGGLESTON, H. G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. *J. London Math. Soc.*, 30, 11-24, 1955.
- [11] ERDÖS, P. Problem No. 4065. *Amer. Math. Monthly*, 51, 169-171, 1944.
- [12] ——— Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 996, 1945.
- [13] ——— On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, 53, 248-250, 1946.
- [14] FEJES TÓTH, L. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, 198 S.
- [15] GALE, D. On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 222-225, 1953.
- [16] GUPTA, H. Non-concyclic sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 19, 315-316, 1953.
- [17] GUSTIN, W. On the interior of the convex hull of an euclidean set. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53, 299-301, 1947.
- [18] HADWIGER, H. Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. *Elemente der Math.*, 1, 98-100, 1946.
- [19] ——— Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math.*, 194, 101-110, 1955.
- [20] HANNER, O. and H. RÅDSTRÖM. A generalization of a theorem of Fenchel. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 589-593, 1951.
- [21] HELLY, E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 32, 175-176, 1923.
- [22] HOPF, H. Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. *Math. Phys. Semesterber.*, 3, 16-29, 1953.
- [23] ——— und E. PANNWITZ. Aufgabe Nr. 167. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 43, 114 kursiv, 1934; 45, 33 kursiv, 1936.
- [24] HORN, A. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 923-929, 1949.
- [25] HORN, A. and F. A. VALENTINE. Some properties of L-sets in the plane. *Duke Math. J.*, 16, 131-140, 1949.
- [26] JUNG, H. W. E. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *J. reine angew. Math.*, 123, 241-257, 1901.
- [27] KARLIN, S. and L. S. SHAPLEY. Some applications of a theorem on convex functions. *Ann. Math. Princeton*, Ser. (2), 52, 148-153, 1950.
- [28] KELLY, L. M. Covering problems. *Nat. Math. Mag.*, 19, 123-130, 1944.
- [29] KIRCHBERGER, P. Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, 57, 509-540, 1903.
- [30] KLEE, V. L., jr. On certain intersection properties of convex sets. *Canadian J. Math.*, 3, 272-275, 1951.
- [31] ——— Brief an H. Hadwiger vom 20. Februar 1953.
- [32] ——— The critical set of a convex body. *Amer. J. of Math.*, 75, 178-188, 1953.

- [33] KLEE, V. L., jr. Brief an P. Vincensini vom 27. September 1954.
- [34] — Common secants for plane convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 639-641, 1954.
- [35] KÖNIG, D. Über konvexe Körper. *Math. Z.*, 14, 208-210, 1922.
- [36] LEVI, F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. *J. Indian. Math. Soc.*, 15, 65-76, 1951.
- [37] — Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. *Archiv der Math.*, 4, 222-224, 1953.
- [38] MOSER, L. On the different distances determined by n points. *Amer. Math. Monthly*, 59, 85-91, 1952.
- [39] MOTZKIN, Th. The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70, 451-464, 1951.
- [40] MÜLLER, A. Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen. *Elemente der Math.*, 8, 37-38, 1953.
- [41] NAGY, B. Sz.-. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. *Acta Scient. Math.*, 15, 169-177, 1954.
- [42] PÁL, J. Über ein elementares Variationsproblem. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.*, 3, 1920, 35 S.
- [43] PÓLYA, G. und G. SZEGÖ. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Berlin 1925, Bd. 1, 338 S.; Bd. 2, 408 S.
- [44] RADEMACHER, H. and I. J. SCHOENBERG. Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem. *Canadian J. Math.*, 2, 245-256, 1950.
- [45] — und O. TOEPLITZ. *Von Zahlen und Figuren*. Berlin 1930, 164 S
- [46] RADO, R. Theorems on the intersection of convex sets of points. *J. London Math. Soc.*, 27, 320-328, 1952.
- [47] — A theorem on sequences of convex sets. *Quart. J. Oxford*, Ser. (2), 3, 183-186, 1952.
- [48] RADON, J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.*, 83, 113-115, 1921.
- [49] ROBINSON, C. V. Spherical theorems of Helly's type and congruence indices of spherical caps. *Amer. J. of Math.*, 64, 260-272, 1942.
- [50] SANTALÓ, L. A. Un teorema sobre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 2, 49-60, 1940; 3, 202-210, 1942.
- [51] — Sobre pares de figuras convexas. *Gaz. Mat. Lisboa*, 12, 7-10, 1951; 14, 6, 1953.
- [52] SCHERRER, W. Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. *Elemente der Math.*, 1, 97-98, 1946.
- [53] STEIGER, F. Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, 8, 66-67, 1953.
- [54] STEINITZ, E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine angew. Math.*, 143, 128-175, 1913; 144, 1-40, 1914; 146, 1-52, 1916.
- [55] SYLVESTER, J. J. Question No. 11851. *Educational Times*, 59, 98, 1893,
- [56] TREVISAN, G. Una condizione di allineamento per gli insiemi infiniti di punti del piano euclideo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 18, 258-261, 1949.

- [57] TROST, E. Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahligen Entfernungen. *Elemente der Math.*, 6, 59-60, 1951.
- [58] VINCENSINI, P. Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes. *Bull. Soc. Math. France*, 67, 115-119, 1939.
- [59] — Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps connexes du plan euclidien. *Atti IV. Congr. Un. Mat. Ital.*, 2, 456-464, 1953.
- [60] — Sur certains ensembles d'arcs de cercle ou de calottes sphériques. *Bull. Sci. Math.*, (2), 77, 120-128, 1953.

Reçu le 26 avril 1956.
