Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ANALYTIQUES ET SURFACES DE RIEMANN
Autor: Choquet, Gustave
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32888

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTIONS ANALYTIQUES ET SURFACES DE RIEMANN[1]

PAR

Gustave CHOQUET, Paris

On désignera par C le plan complexe.

DÉFINITION 1: On appelle *germe* de fonction analytique tout couple $g = (z, A)$ où $z \in C$ et où A est une suite $(a_0, a_1, \ldots)$ de nombres complexes telle que $\lim\sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$ (autrement dit telle que la série $\Sigma\, a_n x^n$ ait un rayon de convergence non nul).

On désigne par G l'ensemble de tous les germes.

Si $g = (z, A)$, z est le *support* de g; on désigne par φ l'application $g \to z$ et on l'appelle *projection* de G dans C; pour toute partie $X \in G$, l'ensemble $\varphi(X)$ est le *support* de X.

On appelle a_0 la *valeur principale* de g.

Topologie sur G.

1. Soit $g_0 = (z_0, A_0)$, et soit ρ_0 le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{a_n \in A_0} a_n z^n$. Pour tout ρ tel que $0 < \rho \leqslant \rho_0$, on appelle *rondelle ouverte* $\Delta(g_0, \rho)$, *de centre* g_0 *et de rayon* ρ, la partie de G constituée par les germes $g = (x, A)$ tels que $|x - z_0| < \rho$ et où A est la suite des coefficients du développement en série entière de $\sum\limits_n a_n z^n$ par rapport aux puissances de $\zeta = (z - x)$.

Tout point de G est évidemment centre de rondelles de rayon arbitrairement petit.

---

[1] J'ai essayé ici de définir correctement le prolongement analytique à partir de quelques notions topologiques courantes, d'une façon qui soit compréhensible par un bon étudiant de calcul différentiel et intégral.

Il est immédiat que tout point d'une rondelle ouverte Δ est centre d'une rondelle contenue dans Δ.

D'autre part, soient $g_1 = (z_1, A_1)$ et $g_2 = (z_2, A_2)$ deux germes distincts; ils sont centres de rondelles disjointes:

C'est évident si $z_1 \neq z_2$ car il suffit de prendre le rayon ρ de ces rondelles tel que $\rho < \frac{|z_1 - z_2|}{2}$.

Et si $z_1 = z_2$ cela résulte alors de ce que si deux rondelles Δ_1 et Δ_2 de même rayon, dont les centres g_1 et g_2 ont le même support, se rencontrent, ces rondelles sont identiques. En effet, ceci revient à dire que si deux fonctions f_1, f_2 analytiques dans un disque ouvert plan prennent en un point même valeur, ainsi que toutes leurs dérivées, elles sont identiques dans ce disque.

2. Appelons ouvert de G toute réunion de rondelles ouvertes. Il est immédiat que ces ouverts définissent bien une topologie sur G. Et d'après ce qui précède, cet espace G est séparé.

Chacun des points de G possède une base de voisinages constituée des rondelles ouvertes centrées en ce point.

La restriction de la projection φ à toute rondelle ouverte est biunivoque et bicontinue.

En particulier, tout point de G a un voisinage homéomorphe à un disque ouvert plan; comme G est séparé, G est donc localement compact.

Champ analytique.

DÉFINITION 2: On appelle *champ analytique* toute composante connexe $\mathfrak{A}$ de G.

Ce qui précède montre que tout champ analytique est ouvert dans G (il est également fermé en tant que composante connexe). Donc tout champ analytique est localement compact et chacun de ses points g a une base de voisinages constituée des rondelles de G de centre g.

Surface de Riemann d'un champ analytique.
Fonction analytique.

DÉFINITION 3: Soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique; on appelle *surface de Riemann* de $\mathfrak{A}$ le couple $(\mathfrak{A}, \varphi)$ constitué par $\mathfrak{A}$ et la restriction à $\mathfrak{A}$ de la projection φ dans C.

DÉFINITION 4: Soit $\mathfrak{A}$ un *champ analytique*; on appelle *fonction analytique* du champ $\mathfrak{A}$ l'application $g \to a_0$ qui, à tout germe g de $\mathfrak{A}$ associe la valeur principale a_0 de g.

Soit F la fonction analytique de $\mathfrak{A}$; soit Δ une rondelle ouverte de $\mathfrak{A}$, de centre g_0. La restriction φ_Δ de φ à Δ étant biunivoque, la fonction $F(\varphi_\Delta^{-1}(z))$ est bien définie dans le disque ouvert plan $\varphi(\Delta)$. Elle est identique dans ce disque à la fonction $\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$, si l'on a posé $g = (z_0; \{a_0, a_1, \ldots\})$.

Aussi l'étude de la fonction analytique F sur une rondelle peut-elle être remplacée par celle d'une fonction analytique (au sens classique) sur un disque ouvert plan.

Ce résultat s'étend à tout ouvert Ω de $\mathfrak{A}$ tel que la restriction de φ à ω soit biunivoque.

Ceci nous conduit à la définition suivante:

DÉFINITION 5: Soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique et soit X une partie de $\mathfrak{A}$. On dit que X *recouvre une seule fois* son support si la restriction de φ à X est biunivoque.

Lorsque X recouvre une seule fois $\varphi(X)$, la restriction de φ à X est toujours une homéomorphie dans les deux cas suivants: X est ouvert ou compact.

DÉFINITION 6: Lorsque $\mathfrak{A}$ lui-même recouvre une seule fois son support, on dit que $\mathfrak{A}$ est un *champ analytique uniforme*. On convient alors de confondre $\mathfrak{A}$ avec la fonction holomorphe $F(\varphi^{-1}(z))$ définie dans $\varphi(\mathfrak{A})$.

Pour tout domaine plan D, on démontre qu'il existe des champs uniformes $\mathfrak{A}$ dont le support est D.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

DÉFINITION 7: Soit $(\Delta_i)_{i \in [1, n]}$ une suite finie de rondelles ouvertes de G, de centres g_i et de rayons ρ_i.

On dit que cette suite est une *chaîne* si, pour tout $i > 1$, g_i appartient à Δ_{i-1}. On dit que g_1 et g_n sont les extrémités de la chaîne (g_1 est l'origine et g_n la fin).

Remarque 1. — Notons ici pour la suite, qu'une chaîne est entièrement déterminée dès qu'on connaît son origine g_1, les supports des centres g_i, et les rayons ρ_i.

Théorème 1 : Soient g et g' deux germes de G. Pour que g et g' soient les extrémités d'une chaîne, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à un même champ analytique.

Démonstration. — Toute rondelle de G étant connexe, la réunion d'une suite finie de rondelles dont deux consécutives ont un point commun est connexe. Donc la condition est nécessaire.

Inversement, soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique et soit $g \in \mathfrak{A}$. L'ensemble des points g' de $\mathfrak{A}$ tels que g' soit la fin d'une chaîne d'origine g est évidemment ouvert et fermé relativement à $\mathfrak{A}$, donc est identique à $\mathfrak{A}$.

Remarque 2. — Notons que cette conclusion subsisterait si on modifiait la définition d'une chaîne en imposant aux centres intermédiaires des rondelles d'une chaîne d'appartenir à une partie partout dense de $\mathfrak{A}$, et si l'on imposait aux rayons des rondelles d'appartenir à un ensemble dénombrable de nombres > 0 astreint seulement à contenir des éléments arbitrairement petits.

Corollaire. — Deux éléments quelconques g et g' d'un champ analytique $\mathfrak{A}$ appartiennent à une courbe qui est une réunion finie d'arcs simples ayant pour support des segments de droite.

Théorème 2 (Poincaré-Volterra) :

1. Tout champ analytique $\mathfrak{A}$ est une réunion dénombrable de rondelles ouvertes (ce qui entraîne que $\mathfrak{A}$ a une base dénombrable constituée de rondelles ouvertes).

2. Pour tout $z \in C$, l'ensemble $\varphi^{-1}(z)$ des germes de $\mathfrak{A}$ de support z est au plus dénombrable.

Démonstration. — 1. Soit P une partie dénombrable partout dense du plan complexe C.

L'ensemble des points de $\mathfrak{A}$ dont le support est dans P est évidemment partout dense dans $\mathfrak{A}$. Donc, d'après le théorème 1

et la remarque 2, si l'on désigne par g un élément fixe quelconque de $\mathfrak{A}$ ayant son support dans P, le champ $\mathfrak{A}$ est la réunion des rondelles appartenant à des chaînes finies (Δ_i) d'origine g, de rayons ρ_i rationnels et dont les centres g_i ont leur support $\varphi(g_i) \in$ P.

Une telle chaîne, d'après la remarque 1, est entièrement déterminée par la donnée de g, de la suite $(\varphi(g_i))$ et de la suite (ρ_i). Or l'ensemble des suites finies de couples $(\varphi(g_i), \rho_i)$ est au plus dénombrable; donc l'ensemble des chaînes considérées est au plus dénombrable. D'où la première partie du théorème.

2. Associons à tout $g \in \mathfrak{A}$ une rondelle $\Delta(g)$ de centre g, par exemple la rondelle maximale de centre g (c'est-à-dire la réunion des rondelles de centre g).

D'après une propriété soulignée précédemment si g_1 et g_2 ont même support z, $\Delta(g_1)$ et $\Delta(g_2)$ sont disjointes lorsque $g_1 \neq g_2$. Donc l'ensemble des rondelles $\Delta(g)$ associées aux germes $g \in \varphi^{-1}(z)$ est au plus dénombrable, puisque $\mathfrak{A}$ est à base dénombrable.

Autrement dit, $\varphi^{-1}(z)$ est au plus dénombrable.

Prolongement le long d'une courbe.

DÉFINITION 8: On appelle *courbe paramétrée* de G le couple constitué par une application continue f d'un intervalle I de R dans G, et *l'image* f(I) de I.

Son origine est l'image $f(\alpha)$ de l'origine α de I (si I a une origine). On appelle *support* de la courbe G définie par f, la courbe paramétrée définie par l'application $\varphi(f) = \varphi \circ f$ de I dans C.

Comme l'image d'une courbe paramétrée est toujours connexe, l'image d'une courbe paramétrée de G est toujours contenue dans un champ analytique et un seul.

Théorème 3: Soit g_0 un élément d'un champ analytique $\mathfrak{A}$, et soit z_0 son support. Toute courbe paramétrée de C et d'origine z_0 est le support d'au plus une courbe paramétrée de $\mathfrak{A}$ et d'origine g_0.

Démonstration. — Soit $I = [\alpha, \beta[$ ou $[\alpha, \beta]$ l'intervalle sur lequel est définie la courbe $z(t)$ de C; on suppose que $z(\alpha) = z_0$. Soient f_1 et f_2 deux applications continues de I dans $\mathfrak{A}$ telles que $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = g_0$, et soit T l'ensemble des points $t \in I$ tels que $f_1(t) = f_2(t)$. Cet ensemble T est fermé relativement à I. D'autre part, si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, T est ouvert puisque l'application φ est localement une homéomorphie. Donc T est ouvert et fermé relativement à I; comme T n'est pas vide ($\alpha \in T$) et comme I est connexe, on a $I = T$. Autrement dit, $f_1 = f_2$.

Corollaire. — Soit γ une courbe paramétrée de C et d'origine z_0, définie par $z = z(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$).

Si γ n'est pas le support d'une courbe de $\mathfrak{A}$ d'origine g_0, il existe un point τ de $[\alpha, \beta]$ tel que la courbe $z = z(t)$ ($t \in [\alpha, \tau]$) soit le support d'une courbe de $\mathfrak{A}$ d'origine g_0, mais qu'il n'en soit pas de même de la courbe $z = z(t)$ ($t \in [\alpha, \tau]$).

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le champ analytique $\mathfrak{A}$ est prolongeable à partir de g_0 sur γ jusqu'au point $(\tau, z(\tau))$ exclus, mais pas au-delà. On dit parfois aussi que g_0 et la courbe $z = z(t)$ ($t \in [\alpha, \tau[$) définissent un *point singulier* du champ $\mathfrak{A}$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si $\rho(g)$ désigne le rayon de la rondelle maximale de centre g, $\rho(g(t)) \to 0$ lorsque $t \to \tau$ (où $g(t)$ est le point de $\mathfrak{A}$ associé à $z(t)$).

Théorème de monodromie.

On va énoncer ce théorème classique sous une forme en apparence moins générale, afin d'éviter le recours à la notion d'homotopie. L'énoncé général se déduirait du nôtre assez aisément, en utilisant des propriétés simples de l'homotopie.

Théorème 4: Soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique; soit ω un ouvert de C homéomorphe à un disque ouvert plan, et soit g_0 un point de $\mathfrak{A}$ de support $z_0 \in \omega$.

Si toute courbe paramétrée $z(t)$ ($t \in I$) de ω et d'origine z_0 est le support d'une courbe $f(t)$ ($t \in I$) de $\mathfrak{A}$ et d'origine g_0, la réunion Ω des images $f(I)$ de ces courbes est un ouvert de $\mathfrak{A}$ qui recouvre ω une seule fois.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant, de nature purement topologique:

Lemme: Soit E un espace topologique quelconque et soit φ une application de E dans un espace séparé F. Soit K un compact de E. Si φ est continue en tout point de K, si la restriction de φ à K est biunivoque, et si φ est biunivoque au voisinage de tout point de K, φ est biunivoque au voisinage de K. [1]

Démonstration. — Soit ψ l'application (φ, φ) de E^2 dans F^2. Désignons par δ_E et δ_F les diagonales de E^2 et F^2. Les hypothèses se traduisent de la façon suivante:

(1) F séparé $\rightleftarrows$ δ_F est fermé dans F^2;

(2) K compact $\rightleftarrows$ K^2 compact;

(3) φ continue en tout point de K $\rightleftarrows$ ψ continue en tout point de K^2;

(4) restriction de φ à K biunivoque $\rightleftarrows$ $\psi(K^2 - \delta_E) \subset \complement\, \delta_F$;

(5) biunivocité locale de φ en tout point de K $\rightleftarrows$ $\delta_E \cap K^2$ a un voisinage V tel que $\psi(V - \delta_E) \subset \complement\, \delta_F$.

Des conclusions (1), (3), (4) résulte que $\psi^{-1}(\complement\, \delta_F)$ est un voisinage de $(K^2 - \delta_E)$; en rapprochant ce résultat de (5), on voit que K^2 possède un voisinage W tel qu'en tout point $(x, y) \in W - \delta_E$ on ait $\psi(x, y) \notin \delta_F$.

Or d'après (2), K^2 est compact, donc il existe un voisinage U de K tel que $U^2 \subset W$.

Autrement dit, pour tout couple (x, y) de points distincts de U, on a $(\varphi(x), \varphi(y)) \notin \delta_F$, c'est-à-dire $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Démonstration du théorème 4. — Par hypothèse, on a $\varphi(\Omega) = \omega$.

D'autre part, du fait que la restriction de φ à toute rondelle de $\mathfrak{A}$ est une homéomorphie avec un disque ouvert de C résulte que Ω est un ensemble ouvert.

Il nous reste à montrer que la restriction de φ à Ω est biunivoque (ce sera donc aussi une homéomorphie).

---

[1] On dit qu'une application φ de E est biunivoque au voisinage d'un ensemble A de E si la restriction de φ à un voisinage de A est biunivoque.

Pour simplifier les notations, supposons que ω soit un disque ouvert de centre z_0 et de rayon 1. Le cas général se ramène immédiatement à celui-ci par homéomorphie.

Pour tout point z de ω distinct de z_0, le segment (z_0, z) définit la courbe γ : $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; celle-ci est d'après l'hypothèse la projection d'un arc de $\mathfrak{A}$ d'équation $f_z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ avec $f_z(0) = g_0$. Posons $f_z(1) = g(z)$; on a par construction $\varphi(g(z)) = z$.

D'après le théorème 3, la fonction $g(z)$ est bien définie. Nous allons montrer que $g(z)$ est *continue*.

L'ensemble $f_z([0, 1])$ est un compact K de $\mathfrak{A}$ tel que la restriction de φ à K soit biunivoque, puisque la courbe γ n'a pas de point double.

D'après le lemme précédent, K possède un voisinage U ouvert tel que la restriction φ_U de φ à U soit biunivoque, donc soit une homéomorphie. L'ensemble $V = \varphi(U)$ est un voisinage du segment (z_0, z); or V contient tout segment (z_0, z') où z' est un point assez voisin de z, donc U contient aussi tous les points $g(z')$ correspondants.

Autrement dit $g = \varphi_U^{-1}$ au voisinage de z; donc g est continue.

A toute courbe paramétrée $z(t)$ de ω et d'origine z_0 correspond la courbe $g(z(t))$ de $g(\omega)$ dont la projection sur C est identique à la courbe $z(t)$.

Donc l'ensemble Ω cherché n'est autre que $g(\omega)$. Par construction, cet ensemble recouvre ω une seule fois; comme g est biunivoque et que $g^{-1} = \varphi_{g(\omega)}$, $g(\omega)$ est un ouvert de $\mathfrak{A}$ homéomorphe à ω.

Morceau de champ analytique.

DÉFINITION 9: On appelle *morceau de champ analytique* tout ouvert connexe non vide $\mathfrak{M}$ de l'espace G des germes analytiques.

Il est immédiat qu'un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ appartient à un champ analytique $\mathfrak{A}$ et à un seul, dont il constitue une partie ouverte.

Il est important de savoir reconnaître si un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ est un champ.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment que $\mathfrak{M}$ soit fermé dans G. Nous allons traduire cette condition de façon plus commode:

Théorème 5. — Pour qu'un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ soit un champ, il faut et il suffit que, pour tout point $g \in \mathfrak{M}$, toute rondelle Δ de centre g et de rayon fini soit contenue dans $\mathfrak{M}$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la réalisée. Soit g un élément de G, limite de germes g_n de $\mathfrak{M}$.

Dès que g_n est assez voisin de g, il existe une rondelle de centre g_n et contenant g; donc on a $g \in$ G. Autrement dit, $\mathfrak{M}$ est fermé dans G; c'est donc bien un champ.

Corollaire 1. — Si un morceau de champ analytique $\mathfrak{M}$ a pour support C et recouvre C une seule fois, $\mathfrak{M}$ est un champ.

En effet, pour tout $g \in \mathfrak{M}$ et tout $\rho > 0$, la rondelle $\Delta(g, \rho)$ est alors contenue dans $\mathfrak{M}$.

On appelle un tel champ un *champ entier* ou plus simplement une fonction entière.

Corollaire 2. — Tout morceau de champ M qui contient un ouvert qui recouvre C une seule fois est identique à cet ouvert et est un champ entier.

Inverse d'un germe et inverse d'un champ.

Soient $v = f(u)$ et $u = g(z)$ deux fonctions holomorphes, l'une g au voisinage d'un point z_0, l'autre f au voisinage du point $u_0 = g(z_0)$. La fonction $h(z) = f(g(z))$ est holomorphe au voisinage de z_0.

Si $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de ce point, on a $f'(u_0)\, g'(z_0) = 1$, donc $f'(u_0)$ et $g'(z_0)$ ne sont pas nuls.

Inversement, si $g(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de z_0, avec $g'(z_0) \neq 0$, on sait qu'il existe une fonction $f(u)$ et une seule holomorphe au voisinage de $u_0 = g(z_0)$, et telle que $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de z_0.

Evidemment $f(u_0) = z_0$; la fonction $g(f(u))$ est donc définie au voisinage de u_0; et on a $g(f(u)) = u$ au voisinage de u_0.

Ces remarques montrent qu'à tout germe $g = (z_0; a_0, a_1, \ldots)$ tel que $a_1 \neq 0$, on peut associer un germe et un seul:

$$f = (a_0; z_0, 1/a_1, b_2, \ldots) \text{ tel que } f \circ g = (z_0; z_0, 1, 0, 0, \ldots)\ ^{1}.$$

On note $f = g^{-1}$ et on l'appelle *germe inverse* de g. Ce qui précède montre que $(g^{-1})^{-1} = g$.

Désignons par G* l'ensemble des germes inversibles. L'application Φ de G* sur G* définie par $g \to g^{-1}$ est biunivoque et a pour carré l'identité.

C'est en outre une homéomorphie. Pour le voir, il suffit de vérifier que Φ est continue.

Or ceci résulte de ce que, avec les notations du début de ce paragraphe, si $f(u)$ et $g(z)$ sont deux fonctions localement inverses au voisinage de z_0 et u_0, le germe (z, A) où A est la suite $\left(f(z), \ldots, \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \ldots\right)$ a pour inverse le germe (u, B) où $u = f(z)$ et où B est la suite $\left(g(u), \ldots, \frac{g^{(n)}(u)}{n!}, \ldots\right)$.

Si $\mathfrak{A}$ est un champ de G qui ne soit pas une fonction constante, et si on pose $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap \mathrm{G}^*$, l'ensemble $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^*)$ est fermé et discret (donc aussi dénombrable).

L'ensemble $\Phi(\mathfrak{A}^*)$ est ouvert et connexe, donc appartient à un champ que l'on notera $\mathfrak{B}$.

On a $\Phi(\mathfrak{A}^*) \subset \mathfrak{B}^*$; mais aussi $\Phi(\mathfrak{B}^*) \subset \mathfrak{A}^*$ d'où $\mathfrak{B}^* \subset \Phi(\mathfrak{A}^*)$, donc $\mathfrak{B}^* = \Phi(\mathfrak{A}^*)$.

Aussi appellerons-nous $\mathfrak{B}$ le champ inverse de $\mathfrak{A}$ et le noterons-nous $\mathfrak{A}^{-1}$.

Nous venons de voir que, mis à part deux sous-ensembles dénombrables fermés et discrets, les champs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}^{-1}$ sont homéomorphes dans l'homéomorphie Φ.

Pour éliminer les ensembles dénombrables exceptionnels, il faudrait modifier la définition des germes, en considérant comme germe tout développement (non uniforme) tel que $\left(\sum_0^\infty a_n z^{\frac{n}{p}}\right)$ où p est un entier > 0.

En fait, pour avoir une théorie entièrement satisfaisante, il faudrait aussi remplacer le plan C par le plan $\hat{\mathrm{C}}$ déduit de C

---

[1] Le germe $f \circ g$ se définit de façon évidente d'après ce qui précède.

par l'addition d'un point à l'infini (ce qu'on appelle aussi la sphère de Riemann).

Exemple. — Soit $\mathfrak{A}$ le champ « entier » défini par la fonction entière e^z. La fonction e^z n'a sa dérivée nulle en aucun point, donc $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. D'autre part, e^z n'a pas de point critique (non étudié ci-dessus), donc on aura $(\mathfrak{A}^{-1})^* = \mathfrak{A}^{-1}$. On aura donc $\mathfrak{A}^{-1} = \Phi(\mathfrak{A})$.

En particulier $\mathfrak{A}^{-1}$ sera homéomorphe à $\mathfrak{A}$, donc aussi au plan C.

Le champ inverse de celui de e^z s'appelle logarithme et on note la fonction analytique de ce champ: $\log(g)$.

De la propriété $e^{z+i\pi} = e^z$ résulte que l'homéomorphie $g \to g'$ de G sur lui-même définie comme suit:

$$g' = (z;\, a_0 + 2i\pi,\, a_1, \ldots) \text{ si } g = (z;\, a_0, a_1, \ldots)$$

est une automorphie de $\mathfrak{A}^{-1}$.