Relations entre les deux divisions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Relations entre les deux divisions

Nous avons introduit la seconde division en écrivant l'égalité déduite de $A = BQ + R$, $\deg R < \deg B$, pour les polynômes transposés:

$$\overline{A} = \overline{B}\,\overline{Q} + e_{n-r}\overline{R}$$

où $n = \deg A$, $r = \deg R$.

Il est évident que dans ce cas les coefficients de $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ dans la division suivant les puissances croissantes sont les mêmes que ceux de Q et R, écrits dans l'ordre inverse.

Nous montrerons maintenant qu'on obtient la même propriété en partant de la division suivant les puissances croissantes.

Soit $A = BQ + e_{k+1}\, R$ avec $\nu\,(B) = 0$, $\deg Q \leqslant k$.

Posons $\deg A = n$, $\deg B = p$, $\deg Q = q \leqslant k$. Comme $\nu\,(B) = 0$, on a: $\deg \overline{B} = \deg B = p$. Ecrivons $\overline{R} = \overline{A - BQ}$ et distinguons les quatre cas possibles suivants:

1er cas. Si $\deg A > \deg BQ$, on a: $\overline{A} - e_{n-p-q}\,\overline{B}\,\overline{Q} = \overline{R}$.

2e cas. Si $\deg A = \deg BQ$ et $\deg (A - BQ) = \deg A$, on a: $\overline{A} - \overline{B}\,\overline{Q} = \overline{R}$.

3e cas. Si $\deg A = \deg BQ$ et si $m = \deg (A - BQ) < \deg A$, on a $\overline{A} - \overline{B}\,\overline{Q} = e_{n-m}\,\overline{R}$.

4e cas. Si $\deg A < \deg BQ$, on a: $e_{p+q-n}\,\overline{A} - \overline{B}\,\overline{Q} = \overline{R}$.

Je dis que dans tous ces cas on a l'égalité d'une division euclidienne.

Remarquons qu'on a toujours $\deg \overline{R} \leqslant \deg R = \deg (A - BQ) - k - 1 < \deg (A - BQ) - q$.

Examinons les quatre cas:

1er *cas*. — On a $\deg \overline{R} < \deg (A - BQ) - q = n - q = \deg (e_{n-p-q}\,\overline{B})$ puisque $\deg \overline{B} = p$.

Donc $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ sont les quotient et reste de la division euclidienne de $\overline{A}$ par $e_{n-p-q}\,\overline{B}$.

2e *cas*. — On a $\deg \overline{R} < p + q - q = p = \deg \overline{B}$.

Donc $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ sont les quotient et reste de la division euclidienne de $\overline{A}$ par $\overline{B}$.

3^e^ *cas.* — On a $\deg \overline{R} < m - q$, donc $\deg (e_{n-m}\, \overline{R}) < n - m + m - q = n - q = \deg B = \deg \overline{B}$.

Donc $\overline{Q}$ et $e_{n-m}\, \overline{R}$ sont les quotient et reste de la division euclidienne de $\overline{A}$ par $\overline{B}$.

4^e^ *cas.* — On a $\deg \overline{R} < p + q - q = p = \deg \overline{B}$. Donc $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ sont les quotient et reste de la division euclidienne de $e_{p+q-n}\, \overline{A}$ par $\overline{B}$.

Conclusion

Dans tous les cas on peut obtenir les coefficients des quotient Q et reste R de la division de A par B suivant les puissances croissantes à un ordre k, en effectuant la division euclidienne des transposés $\overline{A}$, $\overline{B}$ de A, B multipliés éventuellement par un e_h et en prenant les coefficients des transposés des quotient et reste de cette division euclidienne.