Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES
Autor: Zamansky, Marc
Kapitel: division suivant les puissances croissantes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Or si on suppose $Q' \neq Q$, on a $\deg(Q' - Q) \geqslant 0$, donc $\deg B(Q' - Q) \geqslant \deg B$ ce qui contredit $\deg B(Q' - Q) < \deg B$. Nécessairement $Q' = Q$.

D'où:

THÉORÈME. — *Etant donnés deux polynômes* A *et* B, $B \neq 0$ *il existe un polynôme* Q *et un seul tel que* $A - BQ = 0$ *ou bien tel que* $\deg(A - BQ) \leqslant \deg(A - BX)$ *quel que soit le polynôme* X*; de plus dans le second cas* $\deg(A - BQ) < \deg B$.

Ce résultat peut alors être écrit:

$$A = BQ + R \ , \qquad \deg R < \deg B$$

où le couple Q, R est unique. Q est le *quotient*, R *le reste.*

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

La division suivant les puissances croissantes

Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ un polynôme non nul, de degré n ($a_n \neq 0$). Appelons polynôme *transposé* de A le polynôme $\overline{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + \dots + a_0 e_n$. Quel que soit $A \neq 0$, $\varphi(\overline{A}) = 0$ et $\deg \overline{A} = \deg A - \varphi(A)$; on a donc $\deg \overline{A} \leqslant \deg A$.

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe $\overline{A}$ relativement au produit de A par une croissante α, à la somme $A + B$, au produit AB.

1° Si $\alpha \neq 0$, on a $\overline{(\alpha A)} = \alpha \overline{A}$.

2° Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ ($a_n \neq 0$) et $B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$ ($b_p \neq 0$) et supposons par exemple $\deg A = n \geqslant \deg B = p$.

Remarquons que quel que soit h, $\overline{(e_h A)} = \overline{A}\, e_0$

a) Si $\deg A = n > p = \deg B$, on a:

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} + e_{n-p} \overline{B}$$

b) Si $\deg A = n = p = \deg B$ et si $\deg(A + B) = \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), on a:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

c) Si $\deg A = \deg B$ et si $\deg(A + B) < \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), soit alors $m = \deg(A + B) < n$.

On a:

$$\overline{A + B} = (a_m + b_m)\, e_0 + \dots + (a_0 + b_0)\, e_m$$

$$\overline{A} + \overline{B} = (a_m + b_m)\, e_{n-m} + \dots + (a_0 + b_0)\, e_n = e_{n-m}\, \overline{(A + B)}\,.$$

Donc $\overline{A} + \overline{B} = e_{n-m}\, (\overline{A + B})$.

3° Soit $a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$.

$$AB = A\, b_p\, e_p + A\, b_{p-1}\, e_{p-1} + \dots + A b_0\, e_0\,.$$

En appliquant le résultat du 2° *a*) précédent on a:

$$\overline{AB} = \overline{A}\, b_0\, e_0 + e_{n+p-(n+p-1)}\, \overline{(A\, b_{p-1}\, e_{p-1} + \dots)} =$$

$$= \overline{A}\, b_p\, e_0 + e_1\, \overline{A}\, b_{p-1} + \dots\,.$$

D'où $\overline{AB} = \overline{A}\, \overline{B}$.

Ces règles étant établies, soient A et B non nuls et supposons deg A $\geqslant$ deg B. Soient Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de A par B:

$$A = BQ + R\,, \qquad \deg R < \deg B\,.$$

Soit $n = \deg A$, $p = \deg B$, $r = \deg R < p$
On a alors:

$$\overline{A} = \overline{B}\, \overline{Q} + e_{n-r}\, \overline{R} = \overline{B}\, \overline{Q} + e_{\deg A - \deg (A - BQ)}\, \overline{R}\,.$$

Comme $\deg Q = n - p$, $\deg \overline{Q} < n - p$ et comme $r < p$, $n - p < \nu\, (e_{n-r}\, \overline{R}) = \nu\, (\overline{A} - \overline{B}\, \overline{Q})$.

Ainsi aux polynômes $\overline{A}$, $\overline{B}$, transposés de A et B est associé un polynôme $\overline{Q}$ tel que $\deg \overline{Q} < \nu\, (\overline{A} - \overline{B}\, \overline{Q})$. [On notera que $\nu\, (\overline{A}) = \nu\, (\overline{B}) = 0$].

Donc dans certains cas (jusqu'à présent), à deux polynômes A, B on peut associer un polynôme Q tel que $\deg Q < \nu\, (A - BQ)$.

C'est l'origine du théorème suivant:

Théorème. — *Etant donnés deux polynômes* A, B *tels que* $\nu(B) = 0$ et un entier $k \geqslant 0$, *il existe un polynôme* Q *et un seul tel que*

$$\deg Q \leqslant k < \nu\ (A - DQ)$$

à moins que $A - BQ = 0$.

Existence. — Considérons tous les polynômes X tels que $\deg X \leqslant k$. Tous les polynômes $A - BX$ ont une valuation bornée car

$$v(A - BX) \leqslant \deg(A - BX) < \max(\deg A, k + \deg B) .$$

Il existe donc au moins un polynôme Q ($\deg Q \leqslant k$) pour lequel $v(A - BX) \leqslant v(A - BQ)$ quel que soit X. Je dis que pour ce polynôme Q, on a $v(A - BQ) > k$. En effet supposons que Q donne à $A - BQ$ la plus grande valuation possible et que cette valuation soit $m \leqslant k$.

On aurait alors

$$A - BQ = c_m e_m + \dots + c_k e_k + \dots + c_N e_N$$

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$$

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_0} e_m B = \lambda e_{m+1} + \dots .$$

Donc $A - B\left(Q + \frac{c_m}{b_0} e_m\right)$ aurait une valuation $> m$ et $Q + \frac{c_m}{b_0} e_m$ serait de degré $\leqslant k$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Q.

Unicité. — Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg Q' \leqslant k$ et $k < v(A - BQ')$ on aurait:

$$k < v(A - BQ - A + BQ') = v(B(Q' - Q)) = v(B) + v(Q' - Q) =$$
$$v(Q' - Q) \leqslant \deg(Q' - Q) \leqslant k$$

ce qui est impossible.

Ainsi à tout couple de polynôme A, B ($v(B) = 0$) et un entier $k \geqslant 0$ correspond un couple unique de polynômes Q, R tels que

$$A = BQ + e_{k+1} R \qquad \text{et} \qquad \deg Q \leqslant k .$$

Cette opération s'appelle division suivant les *puissances croissantes à l'ordre* k.