Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES

Autor: Zamansky, Marc

Kapitel: division suivant les puissances croissantes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Or si on suppose $Q' \neq Q$, on a deg $(Q' - Q) \geqslant 0$, donc deg $B(Q' - Q) \geqslant \deg B$ ce qui contredit deg $B(Q' - Q) < \deg B$. Nécessairement Q' = Q.

D'où:

Théorème. — Etant donnés deux polynômes A et B, B \neq 0 il existe un polynôme Q et un seul tel que A — BQ = 0 ou bien tel que deg (A — BQ) \leq deg (A — BX) quel que soit le polynôme X; de plus dans le second cas deg (A — BQ) \leq deg B.

Ce résultat peut alors être écrit:

$$A = BQ + R$$
, $deg R < deg B$

où le couple Q, R est unique. Q est le quotient, R le reste.

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

LA DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES

Soit $A = a_0 e_0 + ... + a_n e_n$ un polynôme non nul, de degré n $(a_n \neq 0)$. Appelons polynôme transposé de A le polynôme $\overline{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + ... + a_0 e_n$. Quel que soit $A \neq 0$, v $(\overline{A}) = 0$ et deg $\overline{A} = \deg A - v$ (A); on a donc deg $\overline{A} \leq \deg A$.

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe \overline{A} relativement au produit de A par une croissante α , à la somme A + B, au produit AB.

1º Si $\alpha \neq 0$, on a $\overline{(\alpha A)} = \alpha \overline{A}$.

2º Soit $A = a_0 e_0 + ... + a_n e_n (a_n \neq 0)$ et $B = b_0 e_0 + ... + b_p e_p (b_p \neq 0)$ et supposons par exemple $\deg A = n \geqslant \deg B = p$. Remarquons que quel que soit h, $\overline{(e_h A)} = \overline{A} e_0$

a) Si deg A = $n > p = \deg B$, on a:

$$\overline{(\mathbf{A}\,+\,\mathbf{B})}\,=\,\overline{\mathbf{A}}\,+\,e_{n-p}\,\overline{\mathbf{B}}$$

b) Si deg A = $n = p = \deg B$ et si deg (A + B) = deg A (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), on a:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

c) Si deg A = deg B et si deg (A + B) < deg A (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), soit alors $m = \deg (A + B) < n$.

On a:

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = (a_m + b_m) e_0 + \dots + (a_0 + b_0) e_m$$

$$\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}} = (a_m + b_m) e_{n-m} + \dots + (a_0 + b_0) e_n = e_{n-m} \overline{(\mathbf{A} + \mathbf{B})}.$$

Donc
$$\overline{A} + \overline{B} = e_{n-m} (\overline{A + B}).$$

3º Soit $a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$.

$$AB = A b_p e_p + A b_{p-1} e_{p-1} + ... + A b_0 e_0.$$

En appliquant le résultat du 2º a) précédent on a:

$$\begin{split} \overline{\rm AB} &= \overline{\rm A} \ b_0 \, e_0 \, + \, e_{n+p-(n+p-1)} \, \overline{({\rm A} \ b_{p-1} \, e_{p-1} \, + \, \ldots)} \, = \\ &= \, \overline{\rm A} \ b_p \, e_0 \, + \, e_1 \, \overline{\rm A} \ b_{p-1} \, + \, \ldots \, . \end{split}$$

D'où $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$.

Ces règles étant établies, soient A et B non nuls et supposons deg $A \gg deg$ B. Soient Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de A par B:

$$A = BQ + R$$
, $deg R < deg B$.

Soit $n = \deg A$, $p = \deg B$, $r = \deg R < p$ On a alors:

$$\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{B}} \, \overline{\mathbf{Q}} \, + \, e_{n-r} \, \overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{B}} \, \overline{\mathbf{Q}} \, + \, e_{\text{deg A-deg (A-BQ)}} \, \overline{\mathbf{R}} \ .$$

Comme deg Q = n - p, deg $\overline{Q} < n - p$ et comme r < p, n - p < v $(e_{n-r} \overline{R}) = v$ $(\overline{A} - \overline{B} \overline{Q})$.

Ainsi aux polynômes \overline{A} , \overline{B} , transposés de A et B est associé un polynôme \overline{Q} tel que deg $\overline{Q} < v$ ($\overline{A} - \overline{B} \overline{Q}$). [On notera que v (\overline{A}) = v (\overline{B}) = 0].

Donc dans certains cas (jusqu'à présent), à deux polynômes A, B on peut associer un polynôme Q tel que deg Q < v (A — BQ). C'est l'origine du théorème suivant:

Théorème. — Etant donnés deux polynômes A, B tels que v(B) = 0 et un entier $k \ge 0$, il existe un polynôme Q et un seul tel que

$$\deg Q \leqslant k < \rho \ (A - DQ)$$

à moins que A - BQ = 0.

Existence. — Considérons tous les polynômes X tels que deg $X \leqslant k$. Tous les polynômes A - BX ont une valuation bornée car

$$o(A - BX) \le deg(A - BX) < max(deg A, k + deg B)$$
.

Il existe donc au moins un polynôme Q (deg $Q \le k$) pour lequel ν (A - BX) $\le \nu$ (A - BQ) quel que soit X. Je dis que pour ce polynôme Q, on a ν (A - BQ) > k. En effet supposons que Q donne à A - BQ la plus grande valuation possible et que cette valuation soit $m \le k$.

On aurait alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{Q} &= c_m \, e_m + \ldots + \, c_k \, e_k + \ldots + \, c_{\scriptscriptstyle \mathbf{N}} \, e_{\scriptscriptstyle \mathbf{N}} \\ \\ \mathbf{B} &= b_0 \, e_0 + \ldots + \, b_p \, e_p \\ \\ \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{Q} - \frac{c_m}{b_0} \, e_m \, \mathbf{B} &= \lambda \, e_{m+1} + \ldots \, . \end{aligned}$$

Donc A — B $\left(Q + \frac{c_m}{b_0} e_m\right)$ aurait une valuation > m et $Q + \frac{c_m}{b_0} e_m$ serait de degré $\leqslant k$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Q.

Unicité. — Si existait $Q' \neq Q$ tel que deg $Q' \leqslant k$ et k < v (A — BQ') on aurait:

$$k < v \; ({\rm A - BQ - A + BQ'}) = v \; ({\rm B} \; ({\rm Q' - Q})) = v \; ({\rm B}) \, + \, v \; ({\rm Q' - Q}) = v \; ({\rm Q' - Q}) \leqslant \deg \; ({\rm Q' - Q}) \leqslant k$$

ce qui est impossible.

Ainsi à tout couple de polynôme A, B (ρ (B) = 0) et un entier $k \ge 0$ correspond un couple unique de polynômes Q, R tels que

$$A = BQ + e_{k+1} R$$
 et $\deg Q \leqslant k$.

Cette opération s'appelle division suivant les puissances croissantes à l'ordre k.