

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES
Autor: Zamansky, Marc
Kapitel: division euclidienne
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32901>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Soit A et B deux polynômes. Soit $B \neq 0$. Si $A = 0$, on a $A = BO$ donc A est divisible par B. Supposons $A \neq 0$ et parmi tous les polynômes $A - BX$ soit $A - BQ$ tel que $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$ quel que soit X, lorsque A n'est pas divisible par B.

Montrons que 1^o: $\deg(A - BQ) < \deg B$; 2^o Q est unique.

1^o Soit en effet:

$$\begin{aligned} B &= b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \quad (b_p \neq 0) \\ A - BQ &= c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m \end{aligned}$$

et supposons $m > p$ et $c_m \neq 0$, m étant le plus petit degré possible de tous les polynômes $A - BX$.

On a alors:

$$\begin{aligned} e_{m-p} B &= b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m \\ \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B &= \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B &= A - B \left(Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} \right) = \\ &= c_0 e_0 + \dots + \left(c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} \right) e_{m-1}. \end{aligned}$$

Q' désignant le polynôme $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$, $A - BQ'$ serait de degré $< m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m. L'hypothèse $m \geq p$ est donc incompatible avec "m est le plus petit degré possible de tous les $A - BX$ ". On a donc $m < p$, c'est-à-dire $\deg(A - BQ) < \deg B$.

2^o Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg(A - BQ') \leq \deg(A - BX)$ quel que soit X, on aurait $\deg(A - BQ') < \deg B$ d'après ce qui précède. Donc

$$\deg(A - BQ - (A - BQ')) = \deg B (Q' - Q) < \deg B.$$

Or si on suppose $Q' \neq Q$, on a $\deg(Q' - Q) \geq 0$, donc $\deg B(Q' - Q) \geq \deg B$ ce qui contredit $\deg B(Q' - Q) < \deg B$. Nécessairement $Q' = Q$.

D'où:

THÉORÈME. — *Etant donnés deux polynômes A et B, B $\neq 0$ il existe un polynôme Q et un seul tel que $A - BQ = 0$ ou bien tel que $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$ quel que soit le polynôme X ; de plus dans le second cas $\deg(A - BQ) < \deg B$.*

Ce résultat peut alors être écrit:

$$A = BQ + R, \quad \deg R < \deg B$$

où le couple Q, R est unique. Q est le *quotient*, R le *reste*.

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

LA DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES

Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ un polynôme non nul, de degré n ($a_n \neq 0$). Appelons polynôme *transposé* de A le polynôme $\bar{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + \dots + a_0 e_n$. Quel que soit $A \neq 0$, $\nu(\bar{A}) = 0$ et $\deg \bar{A} = \deg A - \nu(A)$; on a donc $\deg \bar{A} \leq \deg A$.

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe \bar{A} relativement au produit de A par une croissante α , à la somme A + B, au produit AB.

1° Si $\alpha \neq 0$, on a $\overline{(\alpha A)} = \alpha \bar{A}$.

2° Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ ($a_n \neq 0$) et $B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$ ($b_p \neq 0$) et supposons par exemple $\deg A = n \geq \deg B = p$.

Remarquons que quel que soit h , $\overline{(e_h A)} = \bar{A} e_0$

a) Si $\deg A = n > p = \deg B$, on a:

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} + e_{n-p} \bar{B}$$

b) Si $\deg A = n = p = \deg B$ et si $\deg(A + B) = \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), on a:

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$$

c) Si $\deg A = \deg B$ et si $\deg(A + B) < \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), soit alors $m = \deg(A + B) < n$.