**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 2 (1956)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ALGÈBRE DES POLYNOMES
**Autor:** Zamansky, Marc
**Kapitel:** division euclidienne
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-32901

déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

### La division euclidienne

Soit A et B deux polynômes. Soit $B \neq 0$. Si $A = 0$, on a $A = BO$ donc A est divisible par B. Supposons $A \neq 0$ et parmi tous les polynômes $A - BX$ soit $A - BQ$ tel que $\deg(A - BQ) \leqslant \deg(A - BX)$ quel que soit X, lorsque A n'est pas divisible par B.

Montrons que 1°: $\deg(A - BQ) < \deg B$; 2° Q est unique.

1° Soit en effet:

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \ (b_p \neq 0)$$
$$A - BQ = c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m$$

et supposons $m > p$ et $c_m \neq 0$, $m$ étant le plus petit degré possible de tous les polynômes $A - BX$.

On a alors:

$$e_{m-p} B = b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m$$

$$\frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m \, .$$

D'où

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = A - B\left(Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}\right) =$$
$$= c_0 e_0 + \dots + \left(c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1}\right) e_{m-1} \, .$$

$Q'$ désignant le polynôme $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$, $A - BQ'$ serait de degré $< m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur $m$. L'hypothèse $m \geqslant p$ est donc incompatible avec "$m$ est le plus petit degré possible de tous les $A - BX$". On a donc $m < p$, c'est-à-dire $\deg(A - BQ) < \deg B$.

2° Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg(A - BQ') \leqslant \deg(A - BX)$ quel que soit X, on aurait $\deg(A - BQ') < \deg B$ d'après ce qui précède. Donc

$$\deg(A - BQ - (A - BQ')) = \deg B(Q' - Q) < \deg B \, .$$

Or si on suppose $Q' \neq Q$, on a $\deg(Q' - Q) \geqslant 0$, donc $\deg B(Q' - Q) \geqslant \deg B$ ce qui contredit $\deg B(Q' - Q) < \deg B$. Nécessairement $Q' = Q$.

D'où:

Théorème. — *Etant donnés deux polynômes* A *et* B, $B \neq 0$ *il existe un polynôme* Q *et un seul tel que* $A - BQ = 0$ *ou bien tel que* $\deg(A - BQ) \leqslant \deg(A - BX)$ *quel que soit le polynôme* X*; de plus dans le second cas* $\deg(A - BQ) < \deg B$.

Ce résultat peut alors être écrit:

$$A = BQ + R \,, \qquad \deg R < \deg B$$

où le couple Q, R est unique. Q est le *quotient*, R *le reste.*

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

## La division suivant les puissances croissantes

Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ un polynôme non nul, de degré $n$ ($a_n \neq 0$). Appelons polynôme *transposé* de A le polynôme $\overline{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + \dots + a_0 e_n$. Quel que soit $A \neq 0$, $v(\overline{A}) = 0$ et $\deg \overline{A} = \deg A - v(A)$; on a donc $\deg \overline{A} \leqslant \deg A$.

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe $\overline{A}$ relativement au produit de A par une croissante $\alpha$, à la somme $A + B$, au produit AB.

1° Si $\alpha \neq 0$, on a $\overline{(\alpha A)} = \alpha \overline{A}$.

2° Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ ($a_n \neq 0$) et $B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$ ($b_p \neq 0$) et supposons par exemple $\deg A = n \geqslant \deg B = p$.

Remarquons que quel que soit $h$, $\overline{(e_h A)} = \overline{A}\, e_0$

*a)* Si $\deg A = n > p = \deg B$, on a:

$$\overline{(A + B)} = \overline{A} + e_{n-p} \overline{B}$$

*b)* Si $\deg A = n = p = \deg B$ et si $\deg(A + B) = \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), on a:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$$

*c)* Si $\deg A = \deg B$ et si $\deg(A + B) < \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), soit alors $m = \deg(A + B) < n$.