Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES
Autor: Zamansky, Marc
Kapitel: problème de la division des polynomes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans le cas général:

deg (A + B) $\leqslant$ max (deg A, deg B), c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers deg A, deg B.

2° Si AB $\neq 0$, deg AB = deg A + deg B.

Définition. — Soit A = $(a_0, ..., a_n, 0, ...)$ un polynôme. Nous appellerons *valuation de A* et nous la désignerons par φ (A), le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que $a_m \neq 0$.

Cela entraîne que si $m \geqslant 1$ on a $a_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$. La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A: φ (A) $\leqslant$ deg A.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes:

1° Si φ (A) $>$ φ (B), alors φ (A + B) = φ (B).
Si φ (A) = φ (B) = m *et* si $a_m + b_m \neq 0$,
alors φ (A + B) = φ (A) = φ (B).

Dans le cas général: φ (A + B) $\geqslant$ min (φ (A), φ (B)), c'est-à-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers φ (A), φ (B).

2° Si AB $\neq 0$, alors φ (AB) = φ (A) + φ (B).

Remarque. — Une condition *nécessaire* (seulement) pour que A = B est que deg A = deg B *et* φ (A) = φ (B). La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions deg A = deg B ou φ (A) = φ (B) n'est pas réalisée, alors A $\neq$ B.

Le problème de la division des polynomes

L'ensemble $\mathfrak{P}$ des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que A = BX.

Définition. — On dit que A est divisible par B $\neq 0$, s'il existe Q tel que A = BQ. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q′ tel que A = BQ′ on aurait BQ = BQ′ et comme B $\neq 0$, Q = Q′.

On peut alors présenter cette définition de la façon suivante:

Soit A et B $\neq 0$ deux polynômes; considérons tous les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathfrak{P}$ (c'est-à-dire où X est un polynôme quelconque); dire que A est divisible par B c'est dire qu'il existe $Q \in \mathfrak{P}$ tel que $A - BQ = 0$; Q est alors unique.

Lorsque A n'est pas divisible par B, il est alors naturel d'étudier les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathfrak{P}$ et de tenter de trouver X de façon que $A - BX$ possède quelque propriété vraie lorsque $A = BQ$. Or si $A = BQ$, *nécessairement* $\deg A = \deg BQ$ et $\nu(A) = \nu(BQ)$; si $A \neq 0$ ($A = 0$ n'offre pas d'intérêt) on *doit* avoir $\deg A = \deg B + \deg Q$ et $\nu(A) = \nu(B) + \nu(Q)$.

On peut être tenté de chercher pour deux polynômes A et B, un polynôme X tel que simultanément $\deg A = \deg B + \deg X$ *et* $\nu(A) = \nu(B) + \nu(X)$. Il est facile de voir par un exemple que c'est en général impossible.

On peut alors chercher à sauvegarder l'une des deux propriétés précédentes pour *tout* couple A, B; en d'autres termes la propriété cherchée doit être vraie *quels que soient* les polynômes A et B. Mais si alors on cherche X en lui imposant la seule condition $\deg A = \deg B + \deg X$, on peut satisfaire à cette condition d'une infinité de manières; nous sommes donc amenés à chercher parmi tous les X possibles, ceux qui possèdent une autre propriété. Cette discussion motive le point de vue qui suit.

Considérons une famille quelconque de polynômes non nuls. Comme les degrés sont des entiers $\geqslant 0$, il existe dans cette famille, au moins un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à tous les degrés des polynômes de cette famille. Considérons alors la famille de tous les polynômes $A - BX$ où $X \in \mathfrak{P}$. Si à cette famille on applique la remarque qui vient d'être faite on en conclut qu'il existe au moins un polynôme Q tel que $\deg(A - BQ) \leqslant \deg(A - BX)$ quel que soit $X \in \mathfrak{P}$. Nous verrons alors que nécessairement $\deg(A - BQ) < \deg B$ et que pour tout couple A, B, le polynôme Q tel que $\deg(A - BQ) < \deg B$ est unique. Ce sera *la division euclidienne de* A *par* B *ou division suivant les puissances décroissantes.*

L'idée de la division suivant les puissances croissantes sera

déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

La division euclidienne

Soit A et B deux polynômes. Soit $B \neq 0$. Si $A = 0$, on a $A = BO$ donc A est divisible par B. Supposons $A \neq 0$ et parmi tous les polynômes $A - BX$ soit $A - BQ$ tel que $\deg(A - BQ) \leqslant \deg(A - BX)$ quel que soit X, lorsque A n'est pas divisible par B.

Montrons que 1°: $\deg(A - BQ) < \deg B$; 2° Q est unique.

1° Soit en effet:

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \; (b_p \neq 0)$$
$$A - BQ = c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m$$

et supposons $m > p$ et $c_m \neq 0$, m étant le plus petit degré possible de tous les polynômes $A - BX$.

On a alors:

$$e_{m-p} B = b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m$$
$$\frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m \, .$$

D'où

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = A - B\left(Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}\right) =$$
$$= c_0 e_0 + \dots + \left(c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1}\right) e_{m-1} \, .$$

Q' désignant le polynôme $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$, $A - BQ'$ serait de degré $< m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m. L'hypothèse $m \geqslant p$ est donc incompatible avec "m est le plus petit degré possible de tous les $A - BX$". On a donc $m < p$, c'est-à-dire $\deg(A - BQ) < \deg B$.

2° Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg(A - BQ') \leqslant \deg(A - BX)$ quel que soit X, on aurait $\deg(A - BQ') < \deg B$ d'après ce qui précède. Donc

$$\deg(A - BQ - (A - BQ')) = \deg B\,(Q' - Q) < \deg B \, .$$