**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 2 (1956)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES

Autor: Zamansky, Marc

**Kapitel:** Degré, valuation d'un polynome

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-32901

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi:

$$= a_0 \, b_0 \, e_0 + (a_0 \, b_1 + a_1 \, b_0) \, e_1 + (a_1 \, b_1 + a_2 \, b_0) \, e_2 \; .$$
 AB =  $(a_0 \, e_0 \, + \, a_1 \, e_1 + \, a_2 \, e_2) \, (b_0 \, e_0 \, + \, b_1 \, e_1)$ 

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul  $e_p \ e_q = e_{p+q}$  pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que AB = 0, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes  $a_k \ e_k$  de A celui d'indice le plus élevé  $a_p \ e_p$  tel que  $a_p \neq 0$  et de même  $b_q \ e_q$  dans B. Dans AB figure  $a_p \ b_q \ e_{p+q}$  et comme  $a_p \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ ,  $AB \neq 0$ .

Ainsi AB = 0 entraîne A = 0 ou B = 0. Il en résulte que si  $A \neq 0$  et si AB = 0, alors B = 0. Il en résulte encore que si  $A \neq 0$  et si AB = AC, on a A(B - C) = 0, donc B - C = 0, donc B = C. En d'autres termes cela signifie que tout polynôme différent de 0 est régulier pour la multiplication.

# DEGRÉ, VALUATION D'UN POLYNOME

 $D\'{e}finition$ . — Soit  $A=(a_0,\,a_1,\,...,\,a_n,\,0,\,...)$  un polynôme. Nous appellerons  $degr\'{e}$  de A et nous le désignerons par degA, le plus grand entier  $n\geqslant 0$  tel que  $a_n\neq 0$ :

$$n = \deg A$$

Cela signifie que si  $k \le n$ , il y a au moins un  $a_k \ne 0$  et que  $a_k = 0$  quel que soit k > n.

deg A = 0 signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que A = 0.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1º Si deg A > deg B, alors deg (A + B) = deg A  
Si deg A = deg B = 
$$n$$
 et si  $a_n + b_n \neq 0$ , alors deg (A + B) = deg A = deg B.

Dans le cas général:

 $deg (A + B) \leq max (deg A, deg B)$ , c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers deg A, deg B.

2º Si AB  $\neq$  0, deg AB = deg A + deg B.

 $D\'{e}finition$ . — Soit  $A=(a_0,...,a_n,0,...)$  un polynôme. Nous appellerons valuation de A et nous la désignerons par v (A), le plus petit entier  $m \geqslant 0$  tel que  $a_m \neq 0$ .

Cela entraîne que si  $m \ge 1$  on a  $a_k = 0$  pour  $0 \le k \le m-1$ . La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A:  $\rho$  (A)  $\leq$  deg A.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes:

1º Si 
$$\varphi$$
 (A)  $> \varphi$  (B), alors  $\varphi$  (A + B) =  $\varphi$  (B).  
Si  $\varphi$  (A) =  $\varphi$  (B) =  $m$  et si  $a_m + b_m \neq 0$ ,  
alors  $\varphi$  (A + B) =  $\varphi$  (A) =  $\varphi$  (B).

Dans le cas général:  $\nu$  (A + B)  $\geqslant$  min ( $\nu$  (A),  $\nu$  (B)), c'està-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers  $\nu$  (A),  $\nu$  (B).  $2^{\circ}$  Si AB  $\neq$  0, alors  $\nu$  (AB) =  $\nu$  (A) +  $\nu$  (B).

Remarque. — Une condition nécessaire (seulement) pour que A = B est que deg A = deg B et v(A) = v(B). La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions deg A = deg B ou v(A) = v(B) n'est pas réalisée, alors  $A \neq B$ .

## LE PROBLÈME DE LA DIVISION DES POLYNOMES

L'ensemble  $\mathfrak{T}$  des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que A = BX.

Définition. — On dit que A est divisible par  $B \neq 0$ , s'il existe Q tel que A = BQ. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q' tel que A = BQ' on aurait BQ = BQ' et comme  $B \neq 0$ , Q = Q'.