Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES

Autor: Zamansky, Marc

Kapitel: Base de l'espace vectoriel des polynomes

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BASE DE L'ESPACE VECTORIEL DES POLYNOMES

Les propriétés de l'espace vectoriel des polynômes permettent d'écrire tout polynôme A sous la forme:

$$A = a_0 (1, 0, 0, ...) + a_1 (0, 1, 0, ...) + ... + a_n (0, 0, ..., 1, 0, ...)$$

c'est-à-dire, en désignant par e_k le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de rang k+1 qui vaut 1,

$$A = a_0 e_0 + a_1 e_1 + ... + a_n e_n.$$

L'ensemble des polynômes e_k s'appelle base et l'écriture précédente réalise ce qu'on appelle la décomposition de A sur la base. a_p e_p s'appelle terme de degré p.

La définition de l'égalité de deux polynômes entraîne que cette décomposition est unique.

Appliquons la définition du produit de deux polynômes à deux polynômes e_p , e_q . On a $e_p = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, \alpha_{p+1}, ...)$ où $\alpha_k = 0$ si $k \neq p$ et $\alpha_p = 1$; $e_q = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_q, \beta_{q+1}, ...)$ où $\beta_k = 0$ si $k \neq q$ et $\beta_q = 1$.

Le $(k+1)^{e}$ coefficient de e_p e_q est α_k β_0 + α_{k-1} β_1 + ... + α_0 β_k . Ce coefficient ne peut être différent de zéro que s'il contient α_p β_p . Or le $(k+1)^{e}$ coefficient de e_p e_q est une somme de termes tels que la somme des indices de chaque terme α_{k-m} β_m est k; on ne trouvera donc α_p β_p que dans le $(p+q+1)^{e}$ coefficient ce qui entraîne que seul le $(p+q+1)^{e}$ coefficient de e_p e_q n'est pas nul. Ce dernier coefficient est par définition:

$$\alpha_{p+q} \, \beta_0 + \alpha_{p+q-1} \, \beta_1 + \ldots + \alpha_p \, \beta_q + \ldots + \alpha_0 \, \beta_{p+q} = \alpha_p \, \beta_q = 1 \, .$$

Donc:

$${}^{e_p}{}^{e_q} = {}^{e_q}{}^{e_p} = {}^{e_{p+q}} \cdot$$

Les propriétés suivantes:

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha (\beta A) = \alpha \beta A$$

$$A (B + C) = AB + AC$$

$$e_p e_q = e_{p+q}.$$

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi:

$$= a_0 \, b_0 \, e_0 + (a_0 \, b_1 + a_1 \, b_0) \, e_1 + (a_1 \, b_1 + a_2 \, b_0) \, e_2 \; .$$
 AB = $(a_0 \, e_0 \, + \, a_1 \, e_1 + \, a_2 \, e_2) \, (b_0 \, e_0 \, + \, b_1 \, e_1)$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul $e_p \ e_q = e_{p+q}$ pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que AB = 0, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes $a_k \ e_k$ de A celui d'indice le plus élevé $a_p \ e_p$ tel que $a_p \neq 0$ et de même $b_q \ e_q$ dans B. Dans AB figure $a_p \ b_q \ e_{p+q}$ et comme $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $AB \neq 0$.

Ainsi AB = 0 entraîne A = 0 ou B = 0. Il en résulte que si $A \neq 0$ et si AB = 0, alors B = 0. Il en résulte encore que si $A \neq 0$ et si AB = AC, on a A(B - C) = 0, donc B - C = 0, donc B = C. En d'autres termes cela signifie que tout polynôme différent de 0 est régulier pour la multiplication.

DEGRÉ, VALUATION D'UN POLYNOME

 $D\'{e}finition$. — Soit $A=(a_0,\,a_1,\,...,\,a_n,\,0,\,...)$ un polynôme. Nous appellerons $degr\'{e}$ de A et nous le désignerons par degA, le plus grand entier $n\geqslant 0$ tel que $a_n\neq 0$:

$$n = \deg A$$

Cela signifie que si $k \le n$, il y a au moins un $a_k \ne 0$ et que $a_k = 0$ quel que soit k > n.

deg A = 0 signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que A = 0.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1º Si deg A > deg B, alors deg (A + B) = deg A
Si deg A = deg B =
$$n$$
 et si $a_n + b_n \neq 0$, alors deg (A + B) = deg A = deg B.