

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1956)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ÜBER DIE VERBINDBARKEIT VON LINIENUND  
KRÜMMUNGSELEMENTEN DURCH MONOTON GEKRÜMMTE  
KURVENBOGEN

**Autor:** Ostrowski, Alexander

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32900>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ÜBER DIE VERBINDBARKEIT VON LINIEN- UND KRÜMMUNGSELEMENTEN DURCH MONOTON GEKRÜMMTE KURVENBOGEN

VON

Alexander OSTROWSKI in Basel

---

I. Im Zusammenhang mit dem Vierscheitelsatz von Mukhopadhyaya ist das Problem von Interesse, wann sich zwei gegebene orientierte Linienelemente durch einen monoton gekrümmten Bogen verbinden lassen. Eine notwendige Bedingung hierzu wurde von W. VOGT<sup>1</sup> angegeben. Allerdings ist der sehr scharfsinnige Beweis von W. VOGT recht lang und umständlich. Ferner benutzt dieser Beweis einen Satz von A. KNESER über Krümmungskreise, dessen Beweis auf den Evoluteneigenschaften beruht und daher damals von der „dreimaligen Differenzierbarkeit“ der Kurve Gebrauch machte. Seitdem sind für den Vogtschen Satz einfachere Beweise gegeben worden<sup>2</sup>. Unter diesen setzt namentlich der erste der beiden Beweise von HIRANO die Differenzierbarkeit der Krümmung nicht voraus, womit wohl der Vogtsche Satz zum ersten Mal unter genügend allgemeinen Annahmen bewiesen wurde. Inzwischen habe ich aber die Gültigkeit der Evolutesätze auch unter der Annahme der Stetigkeit der Krümmung allein bewiesen<sup>3</sup>, so dass damit auch die übrigen Beweise des Vogtschen Satzes in ihrer Tragweite entsprechend erweitert worden sind.

---

<sup>1</sup> W. VOGT, Ueber monoton gekrümmte Kurven. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 144 (1914), pp. 239-248.

<sup>2</sup> S. KATSUURA, Ein neuer Beweis des Vogtschen Satzes. *Tohoku Mathematical Journal*, 47 (1940), pp. 94-95; K. HIRANO, Simple proofs of Vogt's theorem, *dieselbst*, pp. 126-128.

<sup>3</sup> Vgl. A. OSTROWSKI, Ueber Evoluten und Evolventen ebener Kurven. *Archiv der Mathematik*, 6 (1955), pp. 170-179, sowie A. OSTROWSKI, Un'applicazione dell'integrale di Stieltjes alla teoria elementare delle curve piane. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, serie VIII, vol. XVIII, 1955, pp. 373-375.

2. Nun lässt sich, wenn man direkt die Evolutebögen in die Betrachtungen hereinzieht, der Beweis des Vogtschen Satzes recht anschaulich führen, wenn auch dabei eine Reihe von Fällen, je nach dem Verlauf der Evolutebögen, zu unterscheiden sind. Diesen anschaulich sehr zugänglichen Beweis gebe ich im folgenden in den Nrn. 7—10. Zuerst gebe ich in den Nrn. 3, 4 zwei analytische Beweise des Vogtschen Satzes. Der erste ist in den benutzten Hilfsmitteln mit dem oben erwähnten Hiranoschen Beweis verwandt, aber, wie mir scheint, etwas einfacher angelegt. Der zweite in Nr. 7 dargelegte bemerkenswert kurze Beweis geht in seinem Grundgedanken auf Herrn B. Eckmann zurück, mit dessen freundlicher Erlaubnis ich ihn hier veröffentliche. Doch setzt dieser Beweis in seiner ursprünglichen elementaren Gestalt die Differenzierbarkeit der Krümmung voraus. Wir machen nun hier, unter Benutzung einer in einem ähnlichen Zusammenhang von uns kürzlich entwickelten Methodik<sup>1</sup>, von dem Begriff des Stieljesintegrals Gebrauch, womit sich ein auch im Falle, dass die Krümmung lediglich als monoton vorausgesetzt wird, gültiger Beweis ergibt, der zwar dadurch an seinem elementaren Charakter, nicht aber an seiner Kürze einbüsst.

3. Andererseits wird in dieser Mitteilung gezeigt, dass die Vogtsche Bedingung nicht nur *notwendig*, sondern auch *hinreichend* ist. Die genaue Formulierung der damit sichergestellten notwendigen und hinreichenden Bedingung findet man in der Nr. 5 als Satz I.

Der Beweis der Umkehrung des Vogtschen Satzes wird am Schluss der Arbeit in der Nr. 21 erbracht, und zwar als ein Korollar eines anderen Satzes, durch den die Fragestellung des Vogtschen Satzes wesentlich erweitert wird. Wir fragen nämlich: in welchem Umfang lassen sich die *Krümmungsradien* vorgeben, wenn sich die beiden zugehörigen Linienelemente durch einen monoton gekrümmten Bogen verbinden lassen? Man erhält die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, wenn man über die Bedingungen des Satzes I hinaus verlangt, dass die Differenz der vorgegebenen Krümmungsradien die Distanz

<sup>1</sup> Vgl. die zweite der in der Fussnote 3 zitierten Mitteilungen.

der Krümmungsmittelpunkte überschreitet. Dieser Satz (Satz II) wird in der Nr. 11 vollständig formuliert. Der Beweis, dass die Bedingung dieses Satzes notwendig ist (Nr. 12), ist fast unmittelbar. Zum Beweis hingegen, dass jene Bedingung auch hinreichend ist, der in den Nrn. 13—20 erbracht wird, müssen wir eine Reihe von Fällen genau diskutieren, die sich je nach der besonderen Lage des vorkommenden Evolutebogens ergeben.

4. Bei diesen Betrachtungen erweist sich die Benutzung der *Evolute als erzeugendes Element* eines monoton gekrümmten Bogens besonders vorteilhaft. Wenn hiervon bisher, wie es scheint, wenig Gebrauch gemacht wurde, so dürfte dies wohl daran liegen, dass über die Differenzierbarkeitsbedingungen, die der Fadenkonstruktion zu Grunde liegen, keine Klarheit herrschte. Die direkte Durchführung der Rechnung scheint zuerst die dreimalige Differenzierbarkeit vorauszusetzen<sup>1</sup>. Durch etwas sorgfältigeres Rechnen kann man die Differentiationsordnung auf 2 herabdrücken. Durch eine Änderung des Ansatzes ist es uns aber kürzlich gelungen zu zeigen, dass die Fadenkonstruktion bereits auf Kurvenbögen monotoner Drehung anwendbar ist und die sich ergebende Evolvente die ursprüngliche Kurve zur Evolute hat<sup>3</sup>. Dadurch ist die Anwendbarkeit dieser Methode in sinngemäsem Umfang sichergestellt.

5. Wir nennen einen orientierten Kurvenbogen  $\gamma$  einen  $\Gamma$ -Bogen, wenn längs  $\gamma$  der Krümmungsradius positiv und stetig ist, monoton abnimmt mit eventuell höchstens endlich vielen Konstanzintervallen und im Endpunkt kleiner als im Anfangspunkt ist, während die Gesamtdrehung kleiner als  $2\pi$  bleibt.

SATZ I. (DER VOGTSCHES SATZ UND SEINE UMKEHRUNG.) — Es seien  $\alpha$ ,  $\beta$  zwei orientierte Linienelemente bzw. durch die Punkte  $A$ ,  $B$ , wobei  $\alpha$  beim Durchlaufen der Strecke  $AB$  von  $A$  nach  $B$  nach rechts und  $\beta$  nach links weist. Notwendig und hinreichend dafür, dass  $A$  und  $B$  durch einen  $\alpha$  in  $A$  und  $\beta$  in  $B$  berührenden von  $A$  nach  $B$  laufenden  $\Gamma$ -Bogen  $s$  verbindbar sind (vgl. Fig. 1),

<sup>1</sup> Vgl. A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 2, Basel, 1950, pp. 406-408.

ist, dass der (in der Fig. 1 gleichfalls mit  $\alpha$  bezeichnete) Winkel aus  $\alpha$  nach dem Verbindungsvektor  $AB$  kleiner ist als der (in der Fig. 1 gleichfalls mit  $\beta$  bezeichnete) Winkel aus dem Vektor  $AB$  nach  $\beta$ .

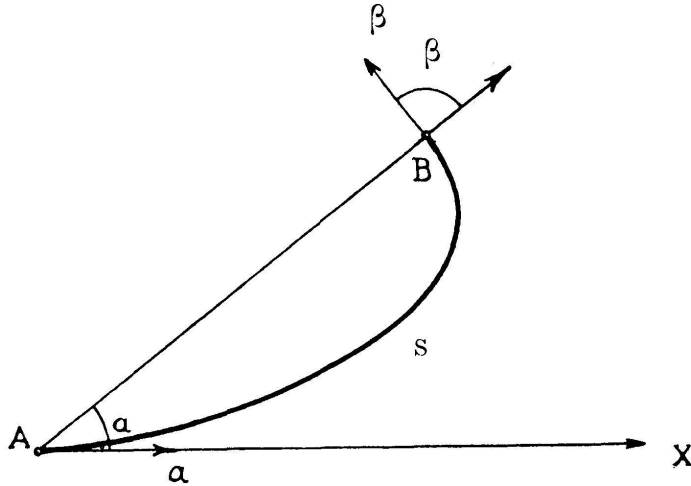


Fig. 1.

6. *Beweis der Notwendigkeit (Der Vogtsche Satz).* — Wir legen die Achsen so, dass der Koordinatenursprung in  $A$  liegt und die positive  $x$ -Richtung in die Richtung  $\alpha$  weist. Ist dann  $\theta$  der Tangentenrichtungswinkel längs  $s$  und  $\rho = \rho(\theta)$  der als Funktion von  $\theta$  ausgedrückte Krümmungsradius von  $s$ , so gilt für den komplex geschriebenen allgemeinen Punkt  $\xi(\theta) = x + iy$  von  $s$ , der zu einem  $\theta$ -Wert gehört,

$$\xi(\theta) = \int_0^{\theta} \rho(\theta) e^{i\theta} d\theta ,$$

und daher, wenn  $\delta = \alpha + \beta$  die Gesamtdrehung längs  $s$  bedeutet, im Endpunkt  $B$  von  $s$

$$\xi(\delta) = \int_0^{\delta} \rho(\theta) e^{i\theta} d\theta , \quad (1)$$

wobei  $\xi(\delta) = T e^{i\alpha}$  ist, unter  $T$  die Distanz  $|AB|$  und unter  $\alpha$  der in Frage kommende Winkel bei  $A$  (siehe Fig. 1) verstanden. Dann haben wir  $e^{i\delta} \overline{\xi(\delta)} = T e^{i\beta}$ , wo  $\beta$  der entsprechende Winkel bei  $B$  ist.

Da nun sowohl  $\alpha$  als auch  $\beta$  jetzt zwischen  $0$  und  $\pi$  gelegen sind, folgt die Behauptung  $\beta > \alpha$ , wenn wir beweisen, dass  $T \cos \alpha > T \cos \beta$ ,

$$\Re \xi(\delta) > \Re e^{i\delta} \overline{\xi(\delta)}, \quad \int_0^\delta \rho(\theta) [\cos \theta - \cos(\delta - \theta)] d\theta > 0$$

gilt. Da die Kosinusdifferenz unter dem Integralzeichen gleich  $2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \left( \frac{\delta}{2} - \theta \right)$  und  $\frac{\delta}{2} < \pi$  ist, genügt es zu beweisen, dass

$$\int_0^\delta \rho(\theta) \sin \left( \frac{\delta}{2} - \theta \right) d\theta > 0 \tag{2}$$

ist. Führt man aber im Integral links  $\frac{\delta}{2} - \theta = \varphi$  als neue Integrationsvariable ein, so wird dieses Integral zu

$$\int_0^{\delta/2} \rho \left( \frac{\delta}{2} - \varphi \right) \sin \varphi d\varphi + \int_{-\delta/2}^0 \rho \left( \frac{\delta}{2} - \varphi \right) \sin \varphi d\varphi .$$

Im zweiten Integral führen wir  $-\varphi$  statt  $\varphi$  als neue Integrationsvariable ein. Dann verwandelt sich schliesslich das Integral in (2) in

$$\int_0^{\delta/2} \left[ \rho \left( \frac{\delta}{2} - \varphi \right) - \rho \left( \frac{\delta}{2} + \varphi \right) \right] \sin \varphi d\varphi ,$$

und dies ist in der Tat *grösser* als Null; denn es könnte nur dann gleich Null sein, wenn  $\rho(\theta)$  längs des ganzen Bogens  $s$  konstant wäre, was aber ausgeschlossen ist.

7. *Zweiter Beweis des Vogtschen Satzes.* — Wir denken uns  $\gamma$  so orientiert, dass  $A$  und  $B$  auf der  $x$ -Achse liegen, während  $\gamma$  sonst *unterhalb* der  $x$ -Achse verläuft. Betrachten wir dann das Integral

$$\int_{A\gamma B} \kappa \dot{y} ds ,$$

wo  $\kappa$  die Krümmung und  $s$  die Bogenlänge ist, so ist es wegen  $\kappa ds = d\theta$ ,  $\dot{y} = \sin \theta$  gleich

$$\int_{A\gamma B} \sin \theta d\theta = - \cos \theta \Big|_A^B = \cos \alpha - \cos \beta .$$

Andererseits kann das obige Integral, da  $y$  zuerst ab und dann zunimmt und daher von beschränkter Variation ist, als das *Stieltjesintegral*  $\int_{A\gamma B} \kappa dy$  aufgefasst werden. Beachtet man nun, dass  $y$  in den Endpunkten von  $\gamma$  verschwindet und sonst negativ ist, während  $\kappa$  längs  $\gamma$  *monoton zunimmt*, so lässt sich auf dieses Integral die auf Stieltjessche Integrale anwendbare Umformung durch partielle Integration wie folgt anwenden:

$$\int_{A\gamma B} \kappa dy = - \int_{A\gamma B} y d\kappa > 0 .$$

Wir sehen, dass  $\cos \alpha > \cos \beta$ ,  $\alpha < \beta$  ist, w.z.b.w.

**8. Dritter Beweis des Vogtschen Satzes.** — Seien  $a, b$  die Krümmungsmittelpunkte von  $s$ , die bzw. den Punkten  $A, B$  entsprechen, und sei  $\sigma$  die von  $a$  nach  $b$  durchlaufene Evolute des  $\Gamma$ -Bogen  $s$ , längs deren dabei die Tangente sich im positiven Sinne dreht; und zwar weist die Anfangstangente an  $\sigma$  in  $a$  nach  $A$  und die Endtangente an  $\sigma$  in  $b$  nach  $B$ . Es ist dann  $|\sigma| = |Aa| - |Bb|$ .  $S$  sei der Schnittpunkt der Normalen an  $s$  in  $A$  und  $B$ .

Wir unterscheiden drei Fälle.

1. *Fall.*  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . — Wir nehmen an, dass  $\beta < \frac{\pi}{2}$  ist, da sonst nichts zu beweisen ist. Die Konfiguration entspricht dann der Fig. 4 der Nr. 15. In dieser Figur verläuft  $\sigma$  zuerst rechts des Halbstrahls  $Aa$ , und da die Drehung  $\alpha + \beta$  längs  $\sigma$  kleiner als  $\pi$  ist, bleibt  $\sigma$  rechts von  $Aa$ . Aus dem gleichen Grunde bleibt  $\sigma$  links von  $Bb$ , was nur dann möglich ist, wenn  $S$  in der Fig. 4 zwischen  $a$  und  $A$ , und  $b$  zwischen  $B$  und  $S$  liegt und  $\sigma$  im Dreieck  $abS$  verläuft. Daher gilt

$$|aS| + |bS| > |\sigma| = |Aa| - |Bb|$$

und daher

$$|Bb| + |bS| > |Aa| - |aS| ,$$

d.h.  $|BS| > |AS|$ . Dann ist aber im Dreieck  $ABS$  die Seite  $BS$  die grössere und der Winkel bei  $B$ ,  $\frac{\pi}{2} - \beta$ , kleiner als der Winkel bei  $A$ ,  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , w.z.b.w.

2. Fall. Sei  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta > \frac{\pi}{2}$ . — Dann haben wir es mit einer der vier Konfigurationen zu tun, die in den Fig. 7 in Nr. 19 und 8 in Nr. 20 gezeichnet sind, wobei von  $a$  die Lagen  $a'$  und  $a''$  und von  $b$  die Lagen  $b'$  und  $b''$  in Frage kommen. In diesen vier Fällen haben wir aber für die Differenz  $|AS| - |BS|$  bzw. die folgenden Ausdrücke:

$$|Aa'| - |Bb'| + (|a'S| - |b'S|) = |\sigma_1| - (|b'S| - |a'S|); \quad (3)$$

$$|Aa'| - |Bb''| + |a'S| + |Sb''| = |\sigma| + (|a'S| + |Sb''|); \quad (4)$$

$$|Aa''| - |Bb'| - (|Sa''| + |b'S|) = |\sigma_1| - (|Sa''| + |b'S|); \quad (5)$$

$$|Aa''| - |Bb''| - (|Sa''| - |Sb''|) = |\sigma| - (|Sa''| - |Sb''|). \quad (6)$$

Nun gilt in den entsprechenden Figuren

$$|\sigma_1| > |a'b'|, \quad |\sigma| > |a''b''|.$$

Daher sind die Ausdrücke (3) und (6) beide positiv. Beim Ausdruck (4) ist dies evident, während beim Ausdruck (5) ein Blick auf die Fig. 8 in Nr. 20 zeigt, dass unter den den Tangenten an  $\sigma_1$  in  $a''$  und  $b'$  auferlegten Bedingungen der Bogen  $\sigma_1$  *ausserhalb* des Winkels  $b'Sa''$  verläuft. Daher ist auch der Ausdruck (5) positiv.

Daher ist im Dreieck  $ABS$  die Seite  $AS$  die grössere und der Winkel  $\alpha - \frac{\pi}{2}$  bei  $A$  kleiner als der Winkel  $\beta - \frac{\pi}{2}$  bei  $B$ .

9. Wir betrachten endlich den 3. Fall,  $\alpha \geq \frac{\pi}{2} \geq \beta$ . Wäre  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ , so lägen  $a$  und  $b$  auf der Geraden  $AB$  und daher müsste  $\sigma$  zuerst *rechts* von  $AB$  verlaufen und schliesslich *von links* in  $b$  hineinkommen, während die Gesamtdrehung  $\alpha + \beta = \pi$  ist. Daher bleiben nur die beiden Möglichkeiten:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta < \frac{\pi}{2}$ ;  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Verschiebt man nun die Gerade durch  $AB$  stetig und parallel mit sich selbst nach rechts, so werden die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  kleiner und, da der Winkel  $\alpha$  dabei gegen Null monoton abnimmt, wird er schliesslich kleiner als  $\frac{\pi}{2}$ , wobei dann immer noch zuerst  $\alpha > \beta$  wäre. Dies steht aber im Wider-

spruch zum oben erledigten Fall 1. Damit ist der Beweis des Vogtschen Satzes erbracht.

**10. LEMMA.** — *Es seien  $\alpha'$ ,  $\beta'$  zwei Halbstrahlen mit den Anfangspunkten bzw. in  $A$ ,  $B$  ( $A \neq B$ ) und es sei der Winkel  $\gamma = \sphericalangle BA\alpha'$  bei  $A$  spitz (eventuell = 0). Dann lässt sich auf  $\alpha'$  ein Punkt  $a$  und auf  $\beta'$  ein Punkt  $b$  so finden, dass*

$$|ab| < |Aa| - |Bb| \quad (7)$$

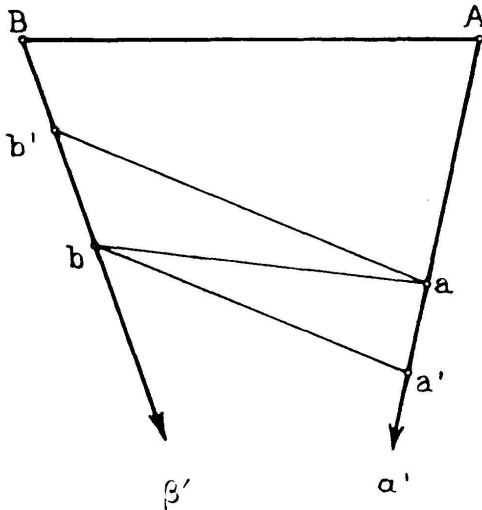


Fig. 2.

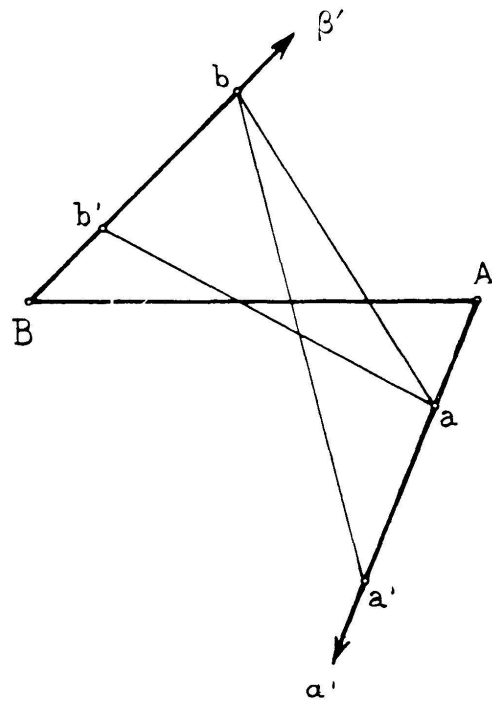


Fig. 3.

gilt, und bei Vergrößerung der Distanz von  $a$  und  $A$ , sowie bei Verkleinerung der Distanz von  $b$  und  $B$  bleibt die Relation (7) richtig.

*Beweis des Lemmas.* — Lässt man (vgl. Fig. 2 und 3)  $a$  längs  $\alpha'$  wandern und sich von  $A$  entfernen, so strebt der Winkel  $aBA$  gegen  $\pi - \gamma$  und wird von einem Punkt an grösser als der Winkel  $\gamma$ . Dann wird  $|aA| > |aB|$ , und wenn  $b$  nahe genug bei  $B$  auf  $\beta'$  angenommen wird, bleibt (7) wahr.

Ist nun  $b'$  auf der Strecke  $bB$  gewählt (vgl. Fig. 2, 3), so gilt  $|ab'| \leq |ab| + |bb'|$  und daher  $|ab'| + |Bb'| \leq |ab| + |bb'| + |Bb'| = |ab| + |bB| < |Aa|$ . Wird aber  $a'$  auf der Verlängerung von  $Aa$  über  $a$  hinaus gewählt, so gilt  $|a'b| \leq |a'a| + |ab| < |a'a| + |aA| - |bB| = |a'A| - |bB|$ .

**11. SATZ II.** — *Es seien die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt und ferner sei der Winkel aus  $\alpha$  nach dem Verbindungsvektor von  $A$  nach  $B$  kleiner als der Winkel aus diesem Verbindungsvektor bei  $B$  nach  $\beta$ . Sei  $a$  ein Punkt auf dem Lot in  $A$  zu  $\alpha$  auf der  $B$  zugewandten Seite und  $b$  ein Punkt auf dem Lot in  $B$  zu  $\beta$  auf der  $A$  zugewandten Seite. (Vgl. Fig. 4—8, in denen die Strecke  $AB$  als vertikal und zwar von  $A$  nach  $B$ , von unten nach oben, durchlaufen orientiert gedacht wird.)*

*Notwendig und hinreichend, damit es einen  $\Gamma$ -Bogen  $s$  gibt, der von  $A$  nach  $B$  läuft und bei dem  $a$  als Krümmungsmittelpunkt dem Punkte  $A$  und  $b$  als Krümmungsmittelpunkt dem Punkte  $B$  entspricht, ist, dass die Relation*

$$|aA| > |ab| + |bB| \quad (8)$$

besteht.

**12. Beweis, dass (8) notwendig ist.** — Sei  $\sigma$  der von  $a$  nach  $b$  verlaufende Evolutebogen zu  $s$ . Dann gilt für die Länge von  $\sigma$  einerseits

$$|\sigma| = |Aa| - |Bb| \quad (9)$$

und andererseits  $|\sigma| > |ab|$ . Daraus folgt (8) unmittelbar.

**13. Beweis, dass (8) hinreichend ist.** — Wir bezeichnen, wie im Satz I, den Winkel aus dem Linienelement  $\alpha$  in die Richtung  $AB$  wiederum mit  $\alpha$  und analog den Winkel aus der Verlängerung des Vektors  $AB$  über  $B$  hinaus in das Linienelement  $\beta$  mit  $\beta$ . Wir verlängern die Strahlen  $Aa$  und  $Bb$  bis zu ihrem Schnittpunkt  $S$ , wobei  $S$  für  $\alpha + \beta = \pi$  im Unendlichen liegt. Wir haben nur zu zeigen, dass es möglich ist,  $a$  mit  $b$  durch einen Bogen  $\sigma$  von der Länge  $|Aa| - |Bb|$  und der Gesamtdrehung  $\alpha + \beta$  mit eigentlich monoton sich drehender und stückweise stetiger Tangente zu verbinden, der  $Aa$  in  $a$  und  $Bb$  in  $b$  berührt, und zwar so, dass, wenn  $\sigma$  von  $a$  nach  $b$  durchlaufen wird, die gerichtete Tangente in  $a$  nach  $A$  und in  $b$  nach  $B$  weist.

**14.** Denn ist es möglich, einen solchen Kurvenbogen  $\sigma$  zu zeichnen, so erhalten wir in der Evolvente dieses Bogens mit dem

Anfangspunkt in  $A$  gerade einen  $\Gamma$ -Bogen  $s$ , der die im Satze II behauptete Eigenschaft hat.

In der Tat lässt sich nach einem von uns kürzlich bewiesenen Satz<sup>3</sup> die Evolvente zu  $\sigma$  mit den klassischen Eigenschaften bereits dann bilden, wenn über  $\sigma$  nicht mehr als die Existenz einer sich eigentlich monoton drehenden und stückweise stetigen Tangente vorausgesetzt wird, wobei also endlich viele Ecken zugelassen werden. Andererseits wird auf diese Weise mit einem geeigneten Bogen  $\sigma$  jeder  $\Gamma$ -Bogen  $s$  erhalten, da, wie aus unseren a.a.O. bewiesenen Resultaten folgt, jeder  $\Gamma$ -Bogen eine Evolute mit den in den klassischen Sätzen gegebenen Eigenschaften besitzt.

Um allerdings nur den Satz II, also die *Existenz* eines  $\Gamma$ -Bogens  $s$  zu beweisen, genügt es bereits,  $\sigma$  z.B. aus Kreisbögen zusammenzusetzen.

**15.** An sich lassen sich natürlich wegen (8)  $a$  und  $b$  durch einen aus Kreisbögen zusammengesetzten Bogen  $\sigma$ , der der Bedingung (9) genügt, ohne weiteres verbinden. Die weiteren  $\sigma$  auferlegten Bedingungen verlangen indessen eine genauere Diskussion, die die Betrachtung verschiedener von der geometrischen Konfiguration abhängiger Fälle bedingt.

*Fall I.* — Seien die beiden Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  *spitz* (vgl. Fig. 4). Wir zeigen zuerst, dass  $S$  zwischen  $a$  und  $A$  und  $b$  zwischen  $S$  und  $B$  liegt und zwar beide Male *zwischen im eigentlichen Sinne*, so dass die gegenseitige Lage der Punkte der Fig. 4 entspricht. Nun ist im Dreieck  $ABS$  der Winkel bei  $A$  grösser als derjenige bei  $B$ , so dass auf jeden Fall

$$|AS| < |BS| \quad (10)$$

gilt. Läge  $S$  auf dem Halbstrahl von  $A$  nach  $a$  entweder in  $a$  oder über  $a$  hinaus, so könnte nach dem Lemma der Nr. 10 in der Ungleichung (8)  $a$  durch  $S$  ersetzt werden. Wir hätten dann die Ungleichung

$$|SA| > |Sb| + |bB| \geq |SB|,$$

entgegen (10). Läge aber  $S$  auf dem Strahl von  $B$  nach  $b$  in  $b$  oder zwischen  $B$  und  $b$ , so könnte man in (8) nach dem obigen

Lemma *b* durch *S* ersetzen. Wir erhalten aber dann

$$|aA| > |aS| + |SB|$$

oder, wenn auf beiden Seiten  $|aS|$  abgezogen wird,

$$|SA| > |SB|,$$

was (10) widerspricht.

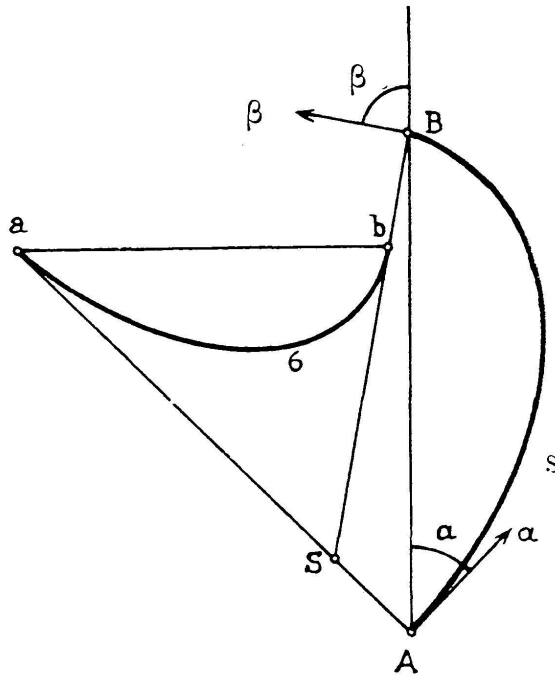


Fig. 4.

**16.** Aus der Fig. 4 folgt nunmehr

$$|AS| = |Aa| - |Sa|, \quad |BS| = |Bb| + |Sb|.$$

Trägt man das in (10) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} |Aa| - |Sa| &< |Bb| + |Sb|, \\ |Aa| - |Bb| &< |Sa| + |Sb|. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (8):

$$|ab| < |Aa| - |Bb| < |Sa| + |Sb|. \quad (11)$$

Man kann daher im Dreieck  $aSb$  einen mit stetig und im eigentlichen Sinne monoton sich drehender Tangente versehenen Bogen  $\sigma$  einzeichnen, der  $aS$  in  $a$ ,  $bS$  in  $b$  berührt, im Uebrigen vollständig innerhalb des Dreiecks  $abS$  verläuft und für den (9)

gilt, womit in diesem Falle die Behauptung des Satzes II bewiesen ist.

17. *Fall II.* — Sei  $\alpha < \frac{\pi}{2} \leq \beta$ ,  $\alpha + \beta \leq \pi$  (vgl. Fig. 5). Dann verläuft der von  $B$  über  $b$  gehende Halbstrahl rechts von der Strecke  $AB$  (oder für  $\beta = \frac{\pi}{2}$  über diese Strecke), während der von  $A$  über  $a$  gehende Halbstrahl links von dieser Strecke

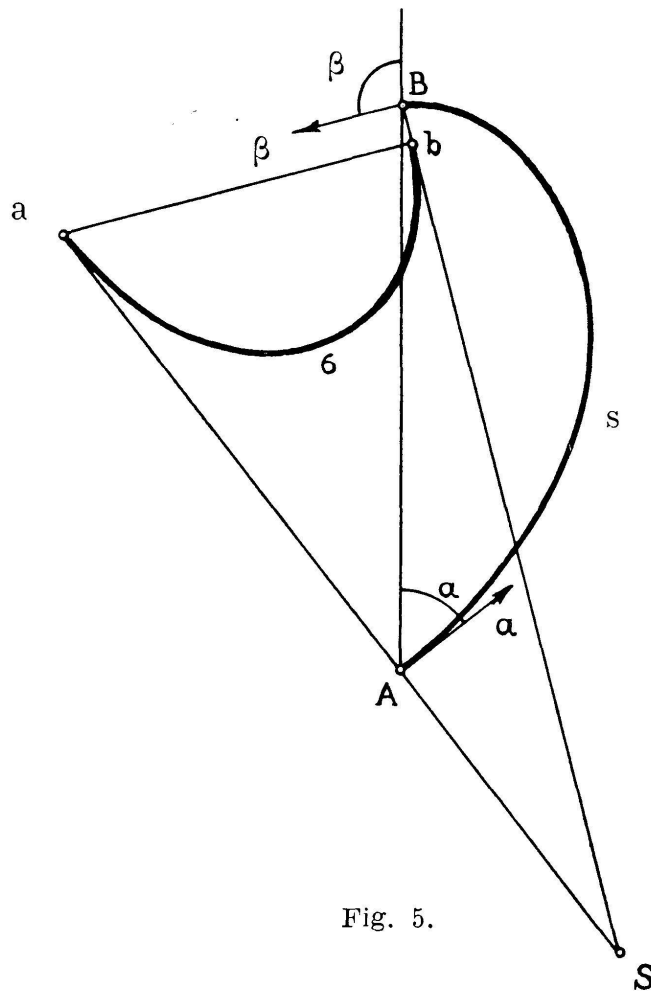


Fig. 5.

verläuft.  $S$  kann (für  $\alpha + \beta = \pi$ ) auch ins Unendliche rücken. Wir wollen nun zeigen, dass  $b$  zwischen  $B$  und  $S$  liegt, so dass die Verhältnisse in der Fig. 5 richtig wiedergegeben sind. Läge in der Tat  $S$  in  $b$  oder zwischen  $b$  und  $B$ , so würde nach dem Lemma die Relation (8) gültig bleiben, wenn in ihr  $b$  durch  $S$  ersetzt wird. Dann wäre aber  $|aA| > |aS| + |Sb|$ , während sicher  $|aA| \leq |aS|$  ist.

Ferner ist die Differenz  $|Aa| - |Bb|$  sicher kleiner als die Summe der beiden Seiten  $|aS|$ ,  $|bS|$  im Dreieck  $abS$ , da ja

bereits  $|aA| \leq |aS|$  ist. Daher kann man einen mit stetiger Tangente versehenen Bogen  $\sigma$  zwischen  $a$  und  $b$  zeichnen, der die Länge  $|\sigma| = |Aa| - |Bb|$  hat und  $aA$  sowie  $bB$  berührt. Damit ist der Fall II erledigt und zwar auch im Grenzfall  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , wo  $S$  in  $A$  hineinfällt.

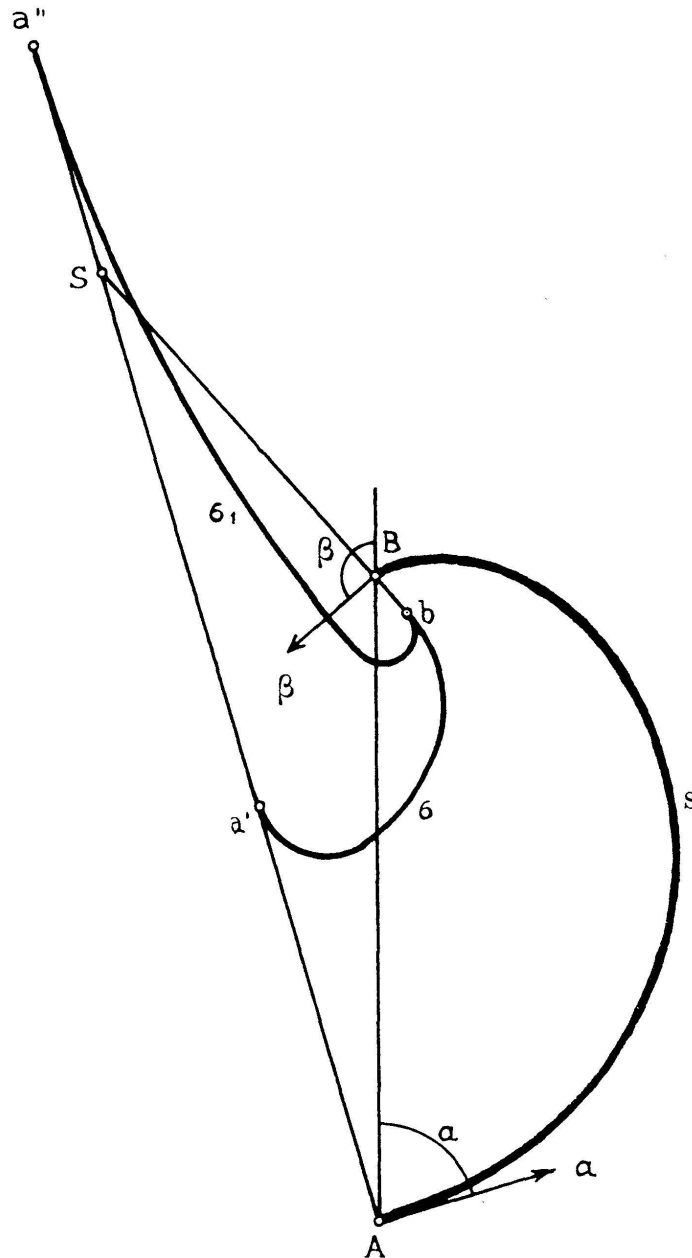


Fig. 6.

18. Fall III. — Es sei  $\alpha \leq \frac{\pi}{2} < \beta$ ,  $\alpha + \beta > \pi$  (vgl. Fig. 6). Dann verläuft der Halbstrahl  $Bb$  rechts von  $AB$ , während der Halbstrahl  $Aa$  entweder links von  $AB$  verläuft oder in die Gerade durch  $A$  und  $B$  hineinfällt. Im ersten Falle liegt  $S$  links

von  $AB$ , im zweiten fällt  $S$  in  $B$  hinein.  $a$  kann entweder in der Lage  $a'$  zwischen  $A$  und  $S$  oder in der Lage von  $a''$ , über  $S$  hinaus, liegen, oder sogar in  $S$  hineinfallen. In jedem Falle kann man  $b$  mit  $a$  durch einen Bogen  $\sigma$  verbinden, der  $Bb$  in  $b$  und  $AS$  in  $a$

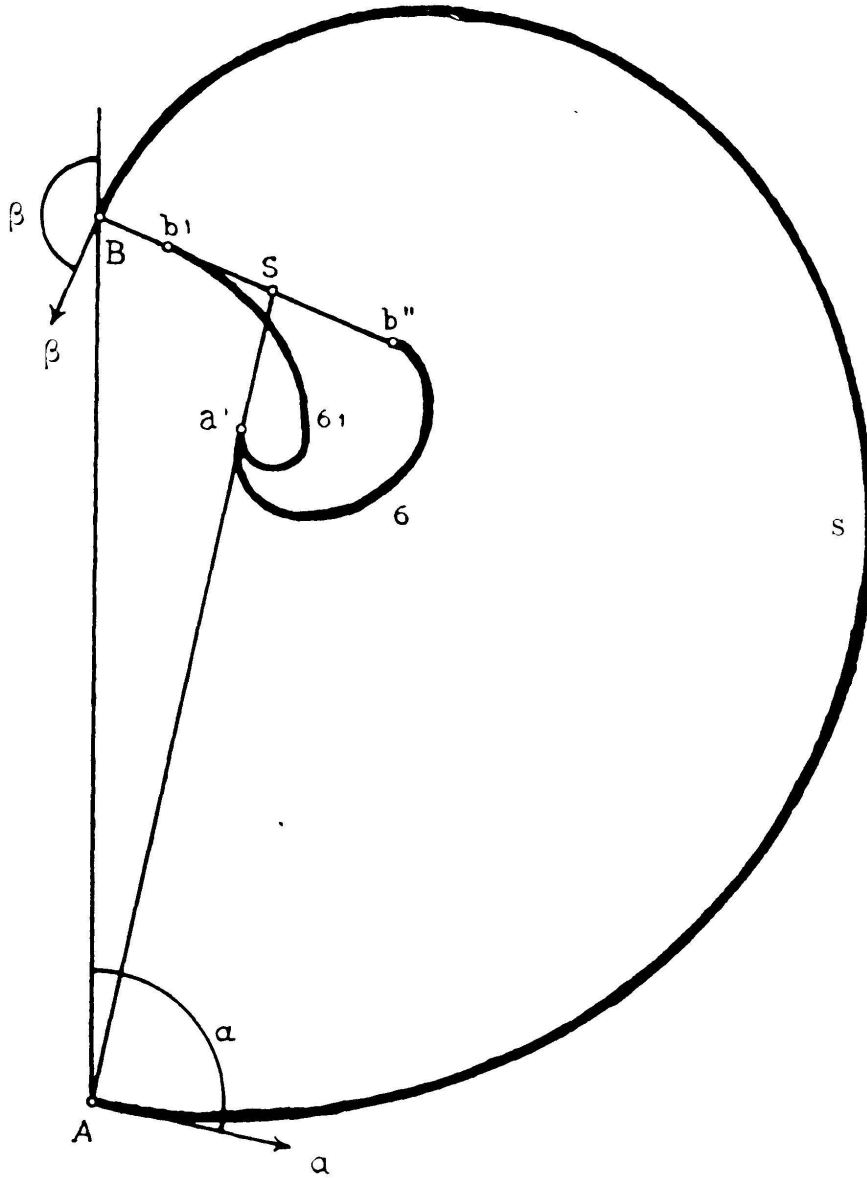


Fig. 7

berührt und zugleich die Länge  $|Aa| - |Bb| > |ab|$ , sowie die verlangten Endtangente besitzt. Da bei der geometrischen Konfiguration des Falles III die Länge von  $\sigma$  nicht nach oben beschränkt ist, ist damit dieser Fall erledigt.

**19.** Wir betrachten nunmehr den (letzten) *Fall IV*. Sei  $\beta > \alpha > \frac{\pi}{2}$  (vgl. Fig. 7, 8). Hier laufen die Halbstrahlen  $Bb$

und  $Aa$  rechts von  $AB$ , und  $S$  liegt im Endlichen rechts von  $AB$ .  $a$  kann entweder die Lage von  $a'$  zwischen  $A$  und  $S$  im eigentlichen Sinne (Fig. 7), oder die Lage von  $a''$  jenseits von  $S$  oder in  $S$  haben (Fig. 8).  $b$  kann ähnlich die Lage  $b'$  oder  $b''$  einnehmen, entweder zwischen  $B$  und  $S$  inklusive  $S$ , oder jenseits von  $S$ .

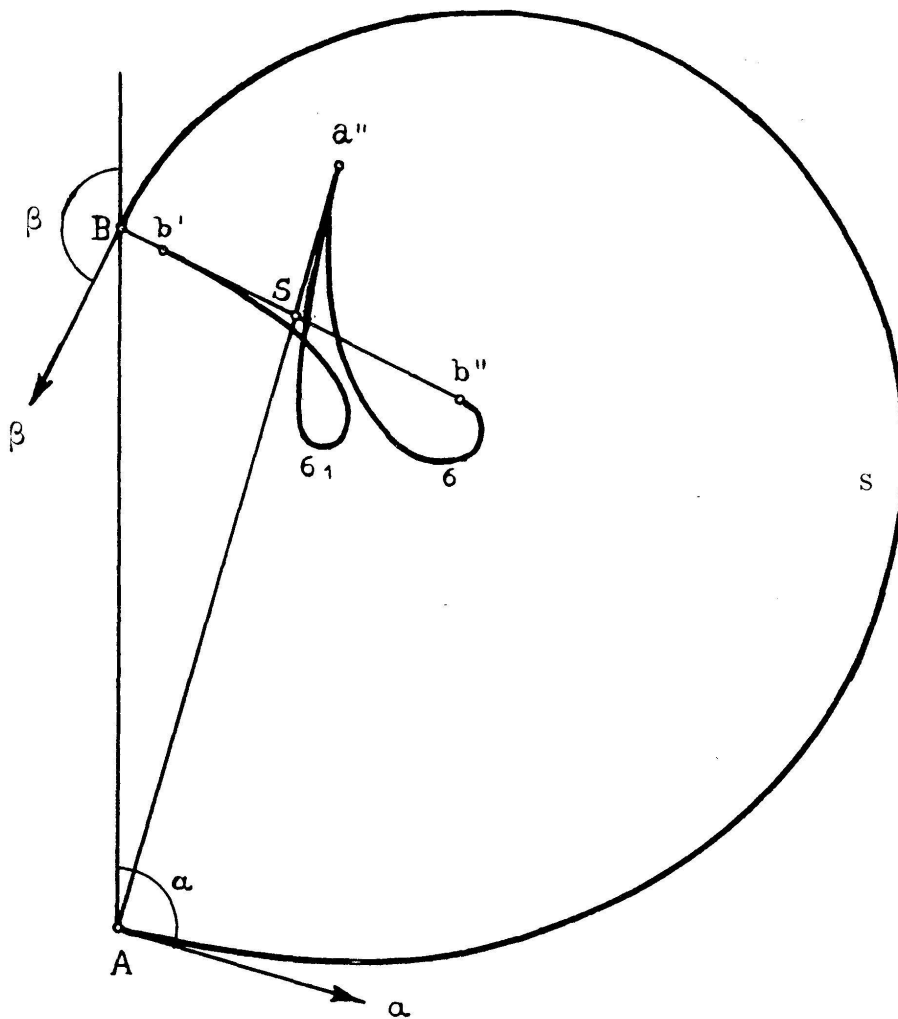


Fig. 8.

Hat  $a$  die Lage von  $a'$ , so lässt sich, wie aus der Fig. 7 ersichtlich,  $a'$  mit  $b'$  oder  $b''$  durch einen Bogen  $\sigma$  mit den verlangten Eigenschaften verbinden, wobei in diesem Falle aus der geometrischen Konfiguration sich keine obere Schranke für die Länge dieses Bogens ergibt.

**20.** Hat  $a$  die Lage von  $a''$  und  $b$  die Lage von  $b''$ , so gilt (vgl. Fig. 8) dasselbe. Hat dagegen dann  $b$  die Lage von  $b'$ , so verläuft der Verbindungsbogen  $\sigma$  von  $a''$  nach  $b'$  mit den verlangten Berührungseigenschaften, wie aus der Fig. 8 ersichtlich,

so, dass er eine Schleife macht und ausserhalb des Winkels  $b'S a''$  bleibt bis auf seine Endpunkte, und zwar gilt dies auch dann, wenn  $b'$  oder  $a''$  oder beide in  $S$  hineinfallen. Hier ist die Länge von  $\sigma$  nach unten durch  $|b'S| + |a''S|$  beschränkt, und wir haben nur zu zeigen, dass in diesem Falle die Ungleichung

$$|Aa''| - |Bb'| > |a''S| + |b'S| \quad (12)$$

gilt. Nun beachte man, dass im Dreieck  $ABS$  wegen  $\beta > \alpha$  der Winkel bei  $B$  der grössere ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} |AS| &> |BS|, \\ |Aa''| - |Sa''| &> |Bb'| + |Sb'|, \end{aligned}$$

woraus (12) ohne weiteres folgt. Damit ist auch der Fall IV erledigt und der Beweis des Satzes II vollendet.

**21.** *Beweis der Umkehrung des Vogtschen Satzes.* — Unter den Voraussetzungen dieser Umkehrung ist das Lemma der Nr. 10 anwendbar, so dass sich für geeignete Punkte  $a, b$  die Relation (7) verifizieren lässt. Dann folgt aber aus dem Satz II, dass  $A$  mit  $B$  sich durch einen  $\Gamma$ -Bogen verbinden lassen, der  $\alpha$  in  $A$  und  $\beta$  in  $B$  berührt. Damit ist der Beweis des Satzes I vollendet.

---