Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÜBER JAKOB BERNOULLIS BEITRÄGE ZUR INFINITESIMALMATHEMATIK

Autor: Hofmann, Jos. E.

Notizen: ANMERKUNGEN

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32892

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ANMERKUNGEN

1 JAKOB BERNOULLI, *Opera* [= *BKC*], 2 Bände, Genf 1744. Die Seiten der beiden stattlichen Quartbände sind durchlaufend numeriert. Der erste Band umfasst VIII+48+664 Seiten, der zweite Band einschliesslich des Titels S.665/1139. Einige Druckfehler sind auf S. 1140/41 verbessert. In dieser Ausgabe fehlt nur die *Neuerfundene Anleitung, wie man den Lauff der Comet- oder Schwantz-sternen in gewisse grundmässige Gesätze einrichten und ihre Erscheinung vorhersagen könne*, Basel 1681, und zwar ersichtlich deshalb, weil sie (bis auf das der deutschen Ausgabe beigegebene *Prognosticon* 15) in das viel weitergehende *Conamen novi systematis cometarum...*, Amsterdam 1682 übergegangen ist. Einige Einzelstücke aus den *Opera* sind in *Ostwalds Klassiker* [= *OKl.*] übergegangen, nämlich die 5 *Dissertationen über unendliche Reihen* (1689/1704), dtsch. v. G. KOWALEWSKI, Leipzig 1909 (Nr. 171), ferner die *Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich zugleich dafür andere vorlege* (*Acta eruditorum* [= *AE*] V 1697 = *BKC*, S. 768/75), dtsch. v. P. STÄCKEL in den *Abhandlungen über Variationsrechnung* I, Abhdlg. II, Leipzig 1894, 2 1914 (Nr. 46) und schliesslich Auszüge aus dem Schlussteil der *Zweiten Abhandlung über die Differentialrechnung* (*AE* VI 1691 = *BKC*, S. 451/52), aus der Abhandlung *Über die Krümmung eines elastischen Bandes* (*AE* VI 1694 = *BKC*, S. 576/600) und aus den *Erklärungen, Zusätzen und Ergänzungen zu dieser Abhandlung* (*AE* XII 1695 = *BKC*, S. 639/45), enthalten in den *Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven*, dtsch. v. H. LINSENBARTH, Leipzig 1910 (Nr. 175), S. 1/17 u. 100/121.

2 Basel 1713. Als Anhang sind die 5 Abhandlungen über die Reihenlehre beigegeben. Eine von R. HAUSSNER besorgte deutsche Übersetzung erschien in *OKl.* unter dem Titel *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi)*, Leipzig 1899 (Nr. 107/08). Teile der *Ars conjectandi* sind auch in der frz. Übersetzung von L. G. F. VASTEL (Buch I: Caen 1801 mit eingehenden Erläuterungen) und in engl. Übersetzung von Fr. MASÈRES erschienen. Sie stehen in dessen *Doctrine of permutations and combinations*, London 1795, S. 35/213 = *Scriptores logarithmici* III, London 1796, S. 23/133.

3 Enthalten in der von C. I. GERHARDT besorgten Ausgabe von *Leibnizens mathematischen Schriften* Berlin-Halle 1849/63 (7 Bände), im folgenden zitiert als *LMG* + Bandnummer, hier *LMG* III_1, S. 1/110. Band III_2 ist fortlaufend durchnumeriert; deshalb werden wir stets als *LMG* III zitieren.

4 Enthalten in dem von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel herausgegebenen und von Herrn O. SPIESS besorgten *Briefwechsel von Johann Bernoulli* I, Basel 1955 [= *BJS*], S. 96/120.

5 *BJS*, S. 1/85.

6 Mskr. *(LI a 3)* der Basler Universitätsbibliothek, im folgenden stets zitiert als *Med.*

7 Hierunter sind zu erwähnen: *a)* Der Nachruf von J. HERMANN für die *AE*, Beilage zum Brief an LEIBNIZ vom 28.10.1705 (*LMG* IV, S. 288/92) und mit einigen von LEIBNIZ vorgenommenen Textänderungen abgedruckt in *AE* I 1706 = LEIBNIZ, *Opera omnia*, ed. L. DUTENS, Genf 1768 (6 Bde), in Zukunft zitiert als *LD* + Bandnummer — hier *LD* IV, S. 280/83.

b) Die von J. BATTIER, einem Jugendfreund JAKOBS, stammende und ersichtlich auf genauer Kenntnis vieler interessanter Einzelheiten fussende *Vita* (Rede vom 23.XI.1705 = *BKC*, S. 7/34).

c) Die familiengeschichtlichen Studien von P. MERIAN, *Die Mathematiker Bernoulli*, Basel 1860.

d) Die Darstellung in R. WOLF, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* I, Zürich 1858.

e) A. SPEISER, *Die Basler Mathematiker*, 117. Neujahrsblatt, herausgg. von der Gesellschaft zur Beförderung des Guten und Gemeinnützigen, Basel 1939.

f) O. SPIESS, *Die Mathematiker Bernoulli*, Basler Universitätsreden Heft *24*, Basel 1948.

g) O. FLECKENSTEIN, *Johann und Jakob Bernoulli*, Basel 1949 = Elemente der Mathematik, Beiheft 6.

8 D. SCHWENTER: *Erquickstunden: Deliciae mathematicae*, Nürnberg 1636.

9 JAKOB hatte damals keine Ahnung davon, dass J. DE BILLY diese Frage in Nr. 26 des *Journal des Sçavans* [= *JS*] vom 23.IX.1666, englisch wiedergegeben in den *Philo-*

sophical Transactions [= *PT*] *1*, Nr. 1 vom 22.X. (1.XI.) 1666 behandelt hatte. Er wusste auch nichts davon, dass die Aufstellung der Julianischen Periode auf J. J. SCALIGER, *Thesaurus temporum*, Leiden 1606, zurückgeht. Die fragliche Formel heisst so: ist s die Jahreszahl im Sonnenzyklus, g die Jahreszahl im Mondzyklus (goldene Zahl) und i die Indiktionszahl, dann ist die Jahreszahl in der Julianischen Periode der Rest von $4845s + 4200g + 6916i$ bei Division durch 7980. Diese Regel gab JAKOB auch in der Dissertation vom 25.I.1684, Art. 96 = *BKC*, S. 190. Als er dann im Januar-Heft der *AE* für 1692 die Rezension las, die LEIBNIZ von J. OZANAM, *Dictionaire mathematique...*, Amsterdam 1691 gegeben hatte, da fand er dort einen Hinweis auf BILLY (bei OZANAM, S. 183). Er notierte sich in den Auszügen, die er in *Med.*, Art. 184 machte, natürlich habe er als 18-jähriger von BILLYS Veröffentlichung nichts gewusst.

10 In den *Med.*, Art. 11 steht eine eingehende Darstellung. Ein nicht ganz zutreffender Bericht des Lyoner Arztes J. SPON in Nr. 8 des *JS* vom 25.III.1680 veranlasste JAKOB, in Nr. 31 des *JS* vom 19.XI.1685 einen französischen Auszug aus seinen Aufzeichnungen einzurücken (= *BKC*, S. 209 bis 210). Dieser Auszug wird wiedererwähnt in *Th.* 25 der Dissertation vom 22.II.1686 (*BKC*, S. 235).

11 Hier einige Beispiele: in Art. 4 der *Med.* wird die Möglichkeit einer in einem einzigen Augenblick vollzogenen mittelbaren Schöpfung aus bereits vorgeformtem Urstoff zurückgewiesen. In Art. 5 wird verneint, dass die bei der Flucht aus Ägypten vor den Israeliten herziehende Wolke auch gegen Hitze geschützt habe. In Art. 16 wird die Frage erörtert, ob es verschiedene Grade der zukünftigen Verklärung geben könne. Das alles wird nach den strengen Regeln der scholastischen Disputierkunst und Logik behandelt. Diese Methode wird auch auf Probleme der damaligen Physik angewendet, so z.B. in Art. 8 auf die (verneinend beantwortete) Frage, ob sich ein senkrecht nach oben geworfener Stein im Umkehrpunkt in Ruhe befinde. Dabei spricht JAKOB für die Aufwärtsbewegung von einem *motus violens*, für die Abwärtsbewegung von einem *motus naturalis*, steht also (trotz GALILEI) noch auf dem Boden der Impetus-Theorie.

12 Beispiel: Art. 12 der *Med.*: Methode zur Bestimmung der Wolkenhöhe, fortgesetzt in Art. 72. Ein Hinweis steht in der Probevorlesung vom 14.II.1687 = *BKC*, S. 311, ein Auszug unter Beschränkung auf die einfachsten Rechnungen des Art. 72 in den *AE* für II 1688 = *BKC*, S. 336/43. Art. 23/25: Auseinandersetzungen um die COPPERNICANISCHE Auffassung, die zwar gegenüber der PTOLEMÄISCHEN den Vorzug grösserer Anschaulichkeit besitze (Art. 24), jedoch mit gewissen Schriftstellen (Art. 23; Vgl. SPEISER [7], S. 9; ferner Art. 25) in Gegensatz stehe und auch auf physikalische Schwierigkeiten stosse, da bei bewegter Erde Änderungen der Fixsternparallaxen zu erwarten wären. Zitiert wird bei dieser Gelegenheit: D. LIPSTORP, *Copernicus redivivus*, Leiden 1653.

13 Vgl. hierzu den aus JAKOBS *Reisebüchlein*, Mskr. *(LI a 5)* der Basler Universitätsbibliothek stammenden Bericht in SPEISER [7], S. 16.

14 *Med.*, Art. 26. Kurz zuvor entstanden die in *BJS*, S. 71 erwähnten noch ungedruckten *Tabulae gnomonicae* von 1678: Mskr. *LI a 2*.

15 Schon in Art. 1 der *Med.*, worin JAKOB die Annahme einer ovalen oder elliptischen Erdgestalt zu Gunsten der Kugelform abweist, wird gegen eine mündlich vorgetragene Lehrmeinung MEGERLINS Stellung genommen. In dem nur der deutschen Ausgabe der *Kometentheorie* [1] beigefügten *Prognosticon* macht sich JAKOB über einen Einblattdruck MEGERLINS zum Kometen des Jahres 1680 lustig (SPEISER [7], S. 12/13). In der Dissertation vom 25.I.1684 kommt JAKOB in Art. 94 (*BKC*, S. 190) auf die Erdgestalt zurück, in Art. 90 (*BKC*, S. 189) wendet er sich gegen einen der Gründe MEGERLINS in dessen *Systema mundi Copernicanum*, Amsterdam 1682 für die COPPERNICANISCHE Lehre (SPEISER [7], S. 8/9).

16 U.a. werden J. HEVELIUS, *Cometographia*, Danzig 1668 und T. BRAHE, *De nova stella*, Kopenhagen 1573 erwähnt.

17 JAKOB gibt in der *Kometentheorie* [1] eine Ephemeride unter der Voraussetzung einer Kreisbahn, die natürlich nicht stimmen konnte.

18 Mir scheint Art. 27/35 der *Med.* die Frucht dieses Aufenthaltes zu sein. Art. 27 bezieht sich auf die Einteilung der Linien in gerade, krumme und gemischtlinige. Art. 28/29 handelt von der scheinbaren Grösse geometrischer Figuren bei perspektiver Abbildung. Hier wird neben SCHWENTER [8] II, ed. G. Ph. HARSDÖRFFER, Nürnberg 1651 auch A. DE BOSSE, *Manière universelle de Mr Desargues...*, Paris 1648 zitiert. Diese Studie ist Gegenstand von *Th.* 97 der Dissertation vom 25.I.1684 (*BKC*, S. 190) und von *Th.* 8 der Probevorlesung vom 14.II.1687 (*BKC*, S. 312). In Art. 30 ist von der Behandlung trigonometrischer Tafeln die Rede. Zitiert werden J. NEPER, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* nach der Ausgabe Leiden 1620, ferner A. VLACQ, *Trigonometria artificialis*, Gouda 1633 und B. URSINUS, *Magnus canon logarithmicus*, Kölln a.d. Spree 1624. Art. 31 handelt von der Halbierung einer sehr langen Strecke

vermittels eines Zirkels kleiner Öffnung und eines Anlegelineals. Art. 32 bezieht sich auf eine von Cl. COMIERS in Nr. 16 des *JS* vom 17.VIII.1676 gestellte Einschiebungsaufgabe 3. Grades. Die Lösung wird als 1. Anhang zum *Systema cometarum* von 1682 (*BKC*, S. 41/43) abgedruckt. Die Aufgabe wird nochmals behandelt im Anhang zur *Dissertatio de gravitate aetheris* [22] von 1683 (*BKC*, S. 159/160). In Art. 33 wird die Sonnenhöhe aus der Polhöhe und der Sonnendeklination bestimmt, wenn sich die Sonne genau im Osten befindet. Dabei wird auf die *Tabella horologiaria*, Köln 1648 des sonst kaum genannten Jesuiten L. v. MIDDENDORFF verwiesen. Art. 34 handelt von der Konstruktion einer Sonnenuhr und dürfte bereits von den *Exercitationes mathematicae* (V, *sect.* 29), Leiden 1657 des Fr. VAN SCHOOTEN abhängen, die später so stark auf JAKOB eingewirkt haben. Vgl. ferner das in der Probevorlesung vom 14.II.1687 (*BKC*, S. 312) Angedeutete.

[19] Bei Chr. WITTICH und É. LEMOINE.

[20] Bei J. Fr. BOCKELMANN.

[21] Seine Studien lassen sich in den Art. 36/50 der *Med.* schrittweise verfolgen. Sie könnten recht wohl auf einer Privatunterweisung beruhen. Der mathematische Stil entspricht genau dem Verfahren der „algebraisch-geometrischen Analysis", wie es in der SCHOOTENschen Schule ausgebildet worden war. Im einzelnen erwähne ich Art. 38, wo es um die Konstruktion und Halbmesserberechnung jenes Kreises geht, der zwei äussere von 7 kongruenten sich je zu zweit berührenden Kreisen von aussen und den umschliessenden Kreis der 6 äusseren dieser 7 Kreise von innen berührt. Eine ähnliche Aufgabe ist das MALFATTIsche Problem am gleichschenkligen Dreieck in der Probevorlesung vom 14.II.1687 (*BKC*, S. 303/305). Es hängt zusammen mit einer Aufgabe des Amsterdamer Rechenmeisters N. VOOGHT, gestellt auf einem Einblattdruck von 1682. In Art. 39 erklärt JAKOB den berühmten Kontingenzwinkelstreit zwischen Chr. CLAVIUS und J. PELETIER als gegenstandslos, weil es sich um eine Definitionsfrage handle. Vgl. die Dissertation vom 25.I.1684, *Th.* 82 (*BKC*, S. 189). In Art. 40 wird die von den spätscholastischen EUKLID-Editoren bezweifelte Schlussweise: wenn a weder grösser noch kleiner als b ist, dann ist $a = b$, als r i c h t i g anerkannt. Bei dieser Gelegenheit wird Fr. VIÈTES Standpunkt erwähnt, dargelegt im *Supplementum geometriae*, Tours 1593 = *Opera*, ed. Fr. van SCHOOTEN, Leiden 1646, S. 240. Eine Anspielung auf diesen Art. findet sich in den *Th.* 76 (*BKC*, S. 188) und 89 (*BKC*, S. 189) der Dissertation vom 25.I.1684. Art. 49 bezieht sich auf die Billard-Aufgabe auf rechteckigem Billard und hat zu einer entsprechenden Aufgabe in der Schlussthese 100 der Dissertation vom 25.I.1684 geführt. Andererseits spielt die Billard-Aufgabe eine grosse Rolle in der *Dissertatio de gravitate aetheris* [22]. Auf diesen Art. bezieht sich JAKOB auch in den Bemerkungen zur Rezension LEIBNIZens betreff OZANAMS *Dictionaire* [9], enthalten in Art. 184 der *Med.* — Die kritische Stellung DESCARTES gegenüber bekundet sich in *Th.* 65 (*BKC*, S. 187) der Dissertation vom 25.I.1684 recht deutlich: JAKOB ist fest davon überzeugt, dass sich DESCARTES beim Gottesbeweis, bei der behaupteten Unendlichkeit der Welt, bei den Bewegungsregeln, bei der Begründung der Kohäsion, der Natur der Spiegelung und Brechung usw. geirrt habe.

[22] Amsterdam 1683 = *BKC*, S. 45/163. Das Vorwort ist datiert: Leiden, 11. VII. 1682.

[23] *Quaestiones nonnullae de aëris gravitate*, Middelburg 1681.

[24] Bei dieser Gelegenheit spielt die Stosstheorie vollkommen elastischer Körper (Billard-Kugeln) eine grosse Rolle. In interessanten Digressionen wird von der Wirkung des Steuerruders am Schiff (vgl. *Th.* 72 der Dissertation vom 25.I.1684 = *BKC*, S. 188), von der Fahrtrichtung in Abhängigkeit von der Windrichtung und Steuerstellung und vom Verhalten einer Kette gehandelt — alles Probleme, die später in anderem Zusammenhang erneut auftauchen sollten.

[25] CLUVER zählt zu den LEIBNIZ-Korrespondenten. Er verwies JAKOB auf LEIBNIZ' erste Abhandlung in den *AE* II 1682 (*LMG* V, S. 118/22) = *Philosophical collections* Nr. 7, 1682, worin die LEIBNIZ-Reihe für $\frac{\pi}{4}$ mitgeteilt, jedoch nicht bewiesen wird. Vgl. JAKOB-LEIBNIZ, 19.X.1695 = *LMG* III, S. 22.

[26] Es handelt sich um die *Arithmetica infinitorum*, Oxford 1656, um die *Tractatus duo, prior de cycloide, posterior de cissoide*, Oxford 1659 und um die *Mechanica*, London 1670/71.

[27] Es handelt sich um die *Lectiones opticae*, London 1669 und Titelauflagen, und um die *Lectiones geometricae*, London 1670 und Titelauflagen. BARROWS Name wird übrigens schon in einem Zusatz zu Art. 8 der *Med.* [11] erwähnt, der nach Art. 40 eingeschoben ist. Auf diesen Zusatz wird in *Th.* 25 der Dissertation vom 19.IX.1685 = *BKC* S. 223 angespielt.

[28] Amsterdam 1659/61, ed. Fr. VAN SCHOOTEN.

[29] Einige von JAKOB selbst stammende Vorlesungsprotokolle sind erhalten. Sie werden *in BJS*, S. 67 erwähnt und in O. SPIESS, *Einige neu aufgefundene Schriften der alten Basler Mathematiker*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft *56*, Basel 1944, S. 91/92 näher geschildert. Es handelt sich um Abschriften, die der Genfer Physiker J. JALLABERT im Winter 1737 anfertigen liess. Sie befinden sich heute unter der Signatur *Ms. Inv. 1607* in der Genfer Universitätsbibliothek.

[30] Nr. 21 vom 16.VIII.1683 = *BKC* S. 168/70, vgl. auch *Th.* 73 der Dissertation vom 25.I.1684 = *BKC*, S. 188.

Nr. 22 vom 29.XI.1683 = *BKC*, S. 172/173.

Nr. 28 vom 31.VII.1684 = *BKC*, S. 199/203.

Nr. 19 vom 18.VI.1685 = *BKC*, S. 204/06.

Nr. 29 vom 17.IX.1685 = *BKC*, S. 207/08, wiedererwähnt in *Th.* 27 der Dissertation vom 19.IX.1685 = *BKC*, S. 223.

Nr. 31 vom 19.XI.1685 = *BKC*, S. 209/10 [10].

[31] *AE* II 1686 = *BKC*, S. 239/45.

AE II 1686 = *BKC*, S. 248/50.

AE II 1688 = *BKC*, S. 336/43 [12].

[32] Hier seien nur die Beiträge JAKOBS angeführt;

JS Nr. 12 vom 24.IV.1684 = *BKC*, S. 195/96, erwähnt in *Th.* 24 der Dissertation vom 19.IX.1685 = *BKC*, S. 223.

AE IX 1684 = *BKC*, S. 192/94.

AE VII 1686 = *BKC*, S. 277/81.

AE VII 1691 = *BKC*, S. 460/65.

Nach mehr als 10 Jahren kam JAKOB erneut in drei abschliessenden Veröffentlichungen auf das alte Problem zurück. Sie stehen in der *Histoire de l'ac. sc.* für 1703/04 = *BKC*, S. 930/36, 937/46 und 947/65.

[33] *AE* XII 1686 = *BKC*, S. 286/90.

Probevorlesung vom 14.II.1687, *Th.* 6 = *BKC*, S. 312.

AE VI 1687 = *BKC*, S. 314/27.

AE XI 1688 = *BKC*, S. 355/60.

[34] Druck Basel 1684 = *BKC*, S. 175/92. Vgl. ferner die Anmerkungen 9, 15, 18, 21, 24, 30.

[35] Hierin spiegelt sich wohl Art. 40 [21] der *Med.* wieder.

[36] Leider tappen wir hier mangels irgendwelcher Hinweise in den *Med.* über die Absichten des Verfassers im Dunkeln.

[37] Aus *Th.* 4 der Dissertation vom 19.IX.85 (= *BKC*, S. 219) geht hervor, dass sich JAKOB hier mit *Cap.* 6, *pars* 1 der ARNAULD-NICOLEschen *Logique ou l'art de penser* (Paris 1662 u. öfter) auseinandersetzt.

[38] Dieser Artikel zeigt uns, wie früh sich JAKOB mit isoperimetrischen Fragen befasst hat. Die *Med.* geben keine Auskunft über die Meinung JAKOBS.

[39] Vgl. hierzu Art. 39 [21] der *Med.*

[40] Wahrscheinlich handelt es sich um eine kritische Auseinandersetzung mit dem Axiom vom Umfassenden und Umfassten in ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* I, Axiom 3.

[41] Hier nimmt JAKOB gegen das ARISTOTELIsche Dogma von der Unvergleichbarkeit geradliniger und krummliniger Grössen Stellung. Über dieses vgl. J. E. HOFMANN, *Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss., Phil.-hist. Abt.* 1941/42, Nr. 4, Heidelberg 1942, S. 15/16.

[42] Druck Basel 1685 = *BKC*, S. 211/24. Von den beigefügten Thesen bezieht sich Nr. 25 auf den in [35] erwähnten Zusatz zu Art. 40 der *Med.*, Nr. 26 auf eine Untersuchung über die Sonnenuhr (*Med.*, Art. 35), Nr. 21 auf eine Erbteilungsfrage, die mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammenhängt (genauer ausgeführt in *Med.*, Art. 77 und ergänzend behandelt in der Dissertation vom 22.II.1686, *Th.* 31 = *BKC*, S. 236/37). In *Th.* 13 verteidigt sich Jakob gegen den Vorwurf, er habe in den Bemerkungen über den Kontingenzwinkel [21, 39], über die Julianische Periode [9, 21] und über die *Gravitationstheorie* [22] schon Bekanntes vorgebracht: damals habe er noch nichts von der einschlägigen Literatur gewusst.

[43] *De effervescentia et fermentatione*, Basel 1690 u. ö. = *Opera omnia*, ed. G. CRAMER [= *BJC*], Lausanne/Genf 1742 (richtiger 1743, da das Vorwort erst vom 1.3.1743 datiert ist), 4 Bde. Hier *BJC* I, S. 1/40. Im Anhang (S. 41/44) wird versucht, durch das Zusammenwirken zweier Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes in zwei verbundenen Gefässen ein *perpetuum mobile* zu konstruieren.

[44] Basel 1694 u.ö. = *BJC* I, S. 93/118. Der (heute allein noch interessante) mathematische Teil wurde für sich in den *AE* V 1694 abgedruckt.

[45] Brief an LEIBNIZ vom 14.III.1696 = *LMG* III, S. 30.

46 Tatsächlich hat JOHANN nur eine einzige weitere Untersuchung dieser Art veröffentlicht, die Aufsehen erregende *Disputatio medico-physica de nutritione* vom 11.V.1699, Groningen 1699 u.ö. = *BJC* I, S. 273/306. Die hier vorgebrachten Einwände gegen eine Auferstehung des Leibes mit allen seinen Atomen führte zu heftigen Auseinandersetzungen mit den Theologen, die den rein physikalischen Standpunkt des Verfassers nicht begreifen konnten.

47 Dieses Einschiebungsproblem lässt sich bis auf APOLLONIOS zurückführen. JAKOB ist vielleicht durch das im Kommentar des EUTOKIOS von Askalon zu ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* II Gesagte auf den Gegenstand hingewiesen worden, wahrscheinlicher freilich durch die Erwähnung in der DESCARTESschen *Geometria* (Ausg. 1659) nebst dem zugehörigen Kommentar von SCHOOTEN.

48 Dieses Problem dürfte durch die Lektüre des Briefes von DESCARTES an MERSENNE vom 12.IX.1638 (Ausgabe von Cl. CLERSELIER, Paris 1657/67 u.ö., Band I, Nummer 74) angeregt worden sein.

49 Im Text steht ein Hinweis auf BARROW, *Lectiones opticae* [27], S. 41.

50 Dabei wird auf J. DE WITTS Kegelschnittslehre in Band II, 1661 der *Geometria* [28] hingewiesen.

51 Die Anregung könnte aus NEPERS *Constructio* [18] stammen.

52 *Ohne Anwendung der Algebra jene Zahl zu bestimmen, die 12 und 36 so teilt, dass sich die um 8 vermehrten Quotienten wie 3 : 5 verhalten.* JAKOB gibt eine Lösung vermittels der *regula falsi* in Zahlen und in Buchstaben (die er anscheinend auch rein arithmetisch aufgefasst hat). Eine andere Lösung des Problems ging an ST. SPLEISS. In der Probevorlesung für die Basler Professur vom 14.II.1687 erscheint das Problem als erste Aufgabe (*BKC*, S. 295/300). Der weltkluge JAKOB wusste sehr genau, wie stark er mit der auführlischen Behandlung dieser Aufgabe dem Geschmack der Zeitgenossen entgegenkam.

52a *Positiones miscellaneae e variis philosophiae partibus depromptae*, Basel 1684.

53 *Supplementum geometriae* [21], *prop.* 23/24 = *Opera*, S. 255/56. Die Form der entstandenen Gleichung 3. Grades gleicht jener in SCHOOTENS *Exercitationes mathematicae* [18] V, sect. 21.

54 In der Rechnungsführung folgt JAKOB dem Vorgehen von HUDDE in der Abhandlung *De reductione aequationum* (Brief an SCHOOTEN vom 14.VII.1657), abgedruckt in der *Geometria* I [28], S. 499/500.

55 JAKOB verwendet die Gleichung $x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$, geht mit $x = z + \frac{a}{3}$ zu $z^3 - 2\frac{1}{3}a^2 z + \frac{7}{27}a^3 = 0$ über und erhält schliesslich

$$x = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{7a^3}{54} + \sqrt{\frac{1421a^6}{2916}}} - \sqrt[3]{-\frac{7a^3}{54} + \sqrt{\cdots}}$$

statt

$$x = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{7a^3}{54} + \sqrt{\frac{49a^6 - 1372a^6}{2916}}} - \cdots$$

Er hat also das Zeichen unter der Quadratwurzel verdorben. Dann setzt er $a = 1000$ und erhält $x = 444$ statt 445,04. Dieses Zahlenergebnis hätte er bei VIÈTE [53] *Opera*, S. 256 ablesen können. Es scheint also, dass er das *Supplementum geometriae* nicht selbst besass, sondern nur dem Hörensagen nach kannte.

56 Es soll I. in ein rechtwinkliges Dreieck, II. in einen Viertelkreis ein Rechteck grösstmöglicher Fläche einbeschrieben werden.

57 Die Regel ist enthalten in der Abhandlung *De maximis et minimis* (Brief an SCHOOTEN vom 26.I.1658) abgedruckt in der *Geometria* I [28], S. 507/16. Dort sind auch mehrere Rechenbeispiele gegeben. Anstelle der Differentiation tritt die Multiplikation mit den Gliedern einer passend gewählten arithmetischen Reihe, die als Faktoren der Potenzen der Unbekannten eingeschoben werden. Indem das schwierigste Glied mit Null multipliziert wird, lassen sich in vielen Fällen vorteilhafte Vereinfachungen erzielen.

58 Auch diese Aufgabe stammt von einem Handzettel des Amsterdamer Rechenmeisters N. VOOGHT aus dem Jahr 1682. Sie ist mit in die Probevorlesung vom 14.II.1687 (*BKC*, S. 301/03) übernommen. Das dortige Zahlenbeispiel ist einfacher als das in den *Med.* Dass die Aufgabe im *Problema, quod jubet ex quattuor rectis lineis datis quadrilaterum fieri*, Nürnberg 1598 in voller Allgemeinheit gelöst wurde, das Joh. RICHTER zum Verfasser hat, dürfte JAKOB kaum gewusst haben. Wohl aber finden wir in der *Med.* einen Hinweis auf W. OUGHTRED, *Opuscula mathematica*, ed. J. WALLIS, Oxford 1677.

[59] Vieles davon ist in die *Ars conjectandi* [2] übergegangen. Hier eine kurze Konkordanz:

Med., Art.	*Ars conj.*	*Med.*, Art.	*Ars conj.*
63	I, Anh. *prop.* 3 + III, *prop.* 5	68	III, *prop.* 20
64	*prop.* 4 + III, *prop.* 6	69	*prop.* 6
65	*prop.* 1, verkürzt	70	*prop.* 10
66	*prop.* 2	72	2. Teil Anhg. über das Ballspiel
67	*prop.* 5	82	I, *prop.* 4, Zusatz.

Dann folgen in Art. 83/89 weitere Beispiele, die nicht in die *Ars conjectandi* übergegangen sind, hierauf nach Art. 129 ein Zusatz zu Art. 88, nach Art. 131 ein Zusatz zu Art. 70, nach Art. 133 und 151 zwei wichtige Zusätze zu Art. 77. Sie enthalten eine Vorform des entscheidenden Buch IV, Kap. 4 der *Ars conjectandi*, geben und begründen das Gesetz der grossen Zahlen und werden abgeschlossen mit den kennzeichnenden Worten: *Diese Entdeckung schätze ich höher ein als wenn ich die Kreisquadratur hätte geben können.* Vgl. *BJS*, S. 160, Fussnote 8/10.

[60] Das erste Problem handelt von zwei Würfelspielern und ist in Nr. 25 des *JS* vom 26.VIII.1685 = *BKC*, S. 207 erschienen, blieb jedoch lange unbeachtet und wurde daher von JAKOB selbst in den *AE* V 1690 = *BKC*, S. 429/31 gelöst. Daraufhin teilte auch LEIBNIZ eine Lösung mit (*AE* VII 1690 = *LD* III, S. 237/38). Das Problem hängt zusammen mit der im Anhang zu Buch I der *Ars conjectandi* behandelten *prop.* 1 [59]. Das zweite Problem ist mit dem ersten verwandt. Es befindet sich als *Th.* 20 in der Dissertation vom 19.IX.1685 = *BKC*, S. 221/22. Das dritte Problem bezieht sich auf das Ballspiel und erscheint in *Th.* 32 der Dissertation vom 22.II.1686 = *BKC* S. 237 bis 238. Das vierte Problem tritt als 11. *Th.* der Probevorlesung vom 14.II.1687 = *BKC*, S. 313 auf. Es bezieht sich auf das Lotteriespiel.

[61] In Art. 75 wird sin $(180° - a - b)$ aus cos a, sin a, cos b, sin b bestimmt. Diese Untersuchung ist in die Anmerkungen zur *Geometria* [28], Neuausgabe von 1695 = *BKC*, S. 668/70 übergegangen. In Art. 76 soll aus b, c und $p = b \cos \alpha$ die Seite a gefunden werden. In Art. 79 ist die Identität tg 45° — tg 15° = tg 60° — tg 45° in geometrischer Interpretation enthalten. Aus späterer Zeit stammen weitere ähnliche Aufgaben. Z.B. steht in Art. 102 das Subtraktionstheorem der Tangens-Funktion, in Art. 111 der Projektionssatz $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ im Dreieck. In Art. 127 wird sin $2t$ aus sin t ausgedrückt, in Art. 128 der Sinussatz des Dreiecks am Parallelogramm ausgesprochen. Art. 131 handelt von der Bestimmung der Winkel α und β im Dreieck aus a, b, γ; Art. 137 von einer Dreiecksaufgabe, Art. 145 von der Konstruktion eines Fünfecks, das durch eine kubische Konstruktion gewonnen wird. Art. 146 enthält die Bestimmung von cos $(a + b)$ und sin $(a + b)$ aus tg a, tg b, $1 : \cos a$ und $1 : \cos b$. Art. 151 bezieht sich auf Kontrollrechnungen bezüglich der bekannten Näherungskonstruktionen von C. RENALDINI, *De resolutione et compositione mathematica*, Padua 1668 für regelmässige Vielecke. Wie M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* III, [2] Leipzig 1901, S. 23 bemerkt, tritt diese Konstruktion schon früher auf, nämlich bei A. DE VILLE (1628). JAKOBS Rechnung wird in *Th.* 12 der *Epimetra* zur 3. Reihendissertation vom 24.XI.1696 (*BKC*, S. 765) verwendet. — In Art. 157 werden die Gleichungen für die 5-Teilung und 7-Teilung eines Kreisbogens aufgestellt, sicherlich in Anlehnung an SCHOOTEN, *Exercitationes mathematicae* [18] V, *Sect.* 21; die Vorlage bleibt jedoch ungenannt. Ausserdem erscheinen in Art. 120 Gleichungen für die Seiten regelmässiger Vielecke im Kreise. ausgedrückt aus dem Kreishalbmesser (3- bis 9-Eck).

Aus all dem geht hervor, dass sich JAKOB nicht näher mit den trigonometrischen Lehren der vorausgehenden Epoche abgegeben haben kann; denn dort waren diese Rechnungen und Umformungen schon ausgeführt worden, z.T. viel eleganter und kürzer. Insbesondere lässt sich erkennen, dass JAKOB die einschlägigen Schriften von VIÈTE und dessen Nachfolgern niemals genauer durchgearbeitet hat.

[62] *BKC*, S. 234.

[63] *JS* Nr. 3 vom 19.I.1693 = *BJC* I, S. 64. JOHANN teilt nur die Lösung mit. Er bemerkt, er und sein Bruder hätten sich schon seit mehr als 5 Jahren vergeblich mit dieser Frage beschäftigt. Ausführlich ist das Problem in JOHANNS Vorlesungen für L'HOSPITAL über Differentialrechnung [138], *prop.* 20 behandelt. Von hier ist es in L'HOSPITALS *Analyse* [138], Art. 161 übergegangen. —Auch JAKOB hatte (in einem Brief vom 30.VII.1692 an MENCKE, Druck *AE* IX 1692 = *BKC*, S. 515/16) nur die Lösung angegeben, aber in Art. 193 der *Med.*, der in Abschrift am 14.III.1696 an LEIBNIZ ging (*LMG* III, S. 40/41) und aus dem Nachlass (Stück 16 = *BKC*, S. 1075/77) erstmals allgemein bekannt geworden ist, erscheint auch eine infinitesimalgeometrische Begründung. Vgl. ferner die Erwähnungen des Problems in der Abhandlung JAKOBS in den *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 572 (wo dieser feststellt, JOHANN habe seine Lösung ohne

JAKOBS Vorwissen veröffentlicht) und im Brief JOHANNS an S. FAESCH vom Juli 1695 = *BJS*, S. 415. Das Problem wird auch in L'HOSPITAL, *Analyse*, Art. 61 behandelt.

64 Druck Basel 1686 = *BKC*, S. 225/38. Vgl. ferner die Hinweise in Anm 10, 42, 60, 62.

65 Basel 1686 = *BKC*, S. 251/76. Hier handelt JAKOB vom Gewicht, von der Elastizität und von der Zusammendrückbarkeit der Luft. Er greift zurück auf die *Dissertatio de gravitate aetheris* [22] und führt aus dieser die Rechnung *BKC*, S. 101/02 = S. 272/74 vor. Sie gründet sich auf das BOYLESche Gesetz und handelt vom Druck eines durch Quecksilberfüllung abgesperrten Gasvolumens, falls die abschliessende (unten offene) Röhre im Quecksilbertrog gehoben und gesenkt wird. Dabei wird auf die Erwärmung keine Rücksicht genommen. Neu hinzugekommen ist eine Tabelle (*BKC*, S. 275). Die Vorlesung wurde durch vorgeführte und wohlgelungene Experimente unterstützt. Später hat JAKOB (Art. 206 der *Med.* = Nachlass, Stück 15; *BKC*, S. 1067/74) auch die barometrische Höhenformel gefunden. Natürlich konnte er nicht ahnen, dass auch HUYGENS zu diesem Ergebnis gekommen war (Aufzeichnung vom 17.VII.1662, *Œuvres complètes* [= *HO*] den Haag 1888/1950, 22 Bände), *HO* XIV, S. 483/90 mit weiteren Ergänzungen, S. 491/97).

66 *AE* IX 1686 = *BKC*, S. 282/83. Als Erläuterungsbeispiel dient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+n+n+\ldots+n} = \frac{1}{2};$$

vorgeführt wird jedoch nur die Formel $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Interessanterweise findet sich in den *Med.* keinerlei Aufzeichnung über diesen Gegenstand. Auch später verwendet JAKOB gelegentlich die unvollständige Induktion; vgl. z.B. Art. 173/78 der *Med.* (Anm. 123/28) und die Akademie-Abhandlung von 1702 [364].

67 *BKC*, S. 291/313. Vgl. auch Anm. 12, 18, 21, 52, 58, 60. Bemerkenswert ist noch die ballistische *Th.* 10 = *BKC*, S. 312, worin gesagt wird, die grösste Wurfweite eines Geschützes werde unter Vernachlässigung des Luftwiderstands beim Abschusswinkel 45° erzielt, bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes bei einem nur wenig kleineren Winkel. Das scheint mit *Th.* 14 der Dissertation vom 22.II.1686 = *BKC*, S. 234 zusammenzuhängen, wo JAKOB im Gegensatz zu WALLIS [26], *Mech.* I, *Cap.* 10, *prop.* 8 behauptet, die Wurfbahn sei auch bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes eine Parabel. Das wird in den *Med.*, Art. 52 an Hand eines Zeit-Geschwindigkeitsdiagramms angedeutet. Näheres ist in Art. 138 ausgeführt.

68 In den Art. 92, 95, 105/07, 167.

69 In den Art. 96, 96 *bis*, 100, 111.

70 In den Art. 97, 110, 171.

71 In den Art. 99, 101, 103.

72 In Art. 98 erscheint $(a^2 - x^2)\,y^2 = a^2\,b^2$, in Art. 104 eine C^4 und eine C^6, in Art. 113 die C^4: $y^4 = x^2\,(a^2 - y^2)$ und in Art. 114 die C^3: $(a - x)\,y^2 = (a + x)\,x^2$.

73 Neu tritt die Kenntnis von M. A. RICCI, *Exercitatio geometrica* hinzu, und zwar wird eine Stelle aus der Ausgabe London 1668 zitiert. Diese ist als Anhang zu N. MERCATORS *Logarithmotechnia* abgedruckt.

74 *Med.* Art. 108 ist die Vorstudie zur Abhandlung in den *AE* XI 1687 = *BKC*, S. 328/35 und weicht sprachlich nur wenig von dieser ab. Die Aufzeichnung enthält jedoch einige zusätzliche Rechnungen, die in der Abhandlung unterdrückt sind. Das Problem erscheint nochmals in den Ergänzungen zur *Geometria* am Ende der Ausgabe Frankfurt a.M. 1695. Dort wird in Note 2 = *BKC*, S. 671/74 die Lösung der Gleichung auf den Durchschnitt einer Hyperbel mit einer C^4 zurückgeführt. In Note 13 = *BKC*, S. 689/90 wird das Problem in Verbindung mit den Schnittpunkten zweier passender C^3 gebracht. Über das Gedruckte vgl. A. PROCISSI im *Periodico di mat.* (4) *14*, 1934, S. 1/21, über die Bibliographie des Problems G. LORIA in der *Bibliotheca math.* (3) *4*, 1903, S. 48/51.

75 Ein Hinweis hierauf findet sich am Anfang des Art. 108 der *Med.* Die nämliche Angelegenheit wird erwähnt im Brief JAKOBS an N. FATIO vom 2.V.1700.

76 In der Abhandlung werden keine Namen erwähnt; JAKOB spricht nur vom *summus huius aevi mathematicus* (*BKC*, S. 328).

77 *HO* XX, S. 425/30. Aus den dortigen Aufzeichnungen geht hervor, dass das Problem von M. DE MAUBUISSON — einer sonst unbekannten Pariser Persönlichkeit — stammte. MAUBUISSON hat übrigens eine sehr zierliche rationale Sonderlösung gegeben, deren Grundgedanke bei JAKOB zwar anklingt, jedoch nicht voll durchgeführt ist.

78 Erstaunlicherweise hat HUYGENS, der in solchen Fragen recht empfindlich sein konnte, niemals berichtigend zur Abhandlung JAKOBS Stellung genommen. —

Der anschliessende Art. 109 der *Med.* handelt von der Dreiteilung einer Dreiecksfläche durch zwei senkrechte Gerade. Es liegt ein Problem 4. Grades vor.

[79] Vgl. *Geometria* [28] I, S. 339. Die dortige Stelle ist durch HUYGENS beeinflusst: *HO* XIV, S. 413. Vgl. ferner Note 25 (*BKC*, S. 702) in den Ergänzungen zur *Geometria* [74].

[80] Vgl. *Geometria*, S. 322. Auch diese Stelle ist durch HUYGENS beeinflusst: *HO* XIV, S. 420/22. Nähere Ausführungen finden sich in den Ergänzungen JAKOBS zur *Geometria* [74], Note 24 = *BKC*, S. 700/02.

[81] In Art. 117 werden zur Auflösung der Gleichungen 3. und 4. Grades im Anschluss an HUDDE (*Geometria* I, S. 325) Kreis und Hyperbel herangezogen, dann zur Auflösung der Gleichung 3. Grades im Anschluss an *Geometria*, S. 328 Kreis und Parabel. Im Art. 118 werden zur Auflösung der Gleichung 6. Grades im Anschluss an *Geometria*, S. 97 eine Parabel und eine C^3 verwendet, dann ein Kreis und eine C^3.

[82] Hier führt JAKOB bei der vorausgehenden Normalenkonstruktion durch einen gegebenen Hyperbelpunkt vier Methoden vor: 1. Das Verfahren von DESCARTES (Gleichung 4. Grades mit Doppelwurzel), 2. das von HUDDE [57], 3. das von FERMAT (erste Erwähnung dieses Namens, Vorbild sind vielleicht die *Varia opera*, Toulouse, 1679, S. 63/64) und 4. das eigene (Kreis um einen passenden Asymptotenpunkt so, dass er die Hyperbel im gegebenen Punkt berührt).

[83] *BKC*, S. 343/51. In der Einleitung wundert sich JAKOB darüber, dass weder SCHOOTEN noch HUDDE noch sonst einer der Leser der *Geometria* diese Vereinfachung bemerkt hätten. Er kennt also weder FERMATS *Animadversio in Geometriam Cartesii* [Paris 1657] (ed. J. E. HOFMANN, *Abh. Nr. 9 der Preuss. Ak. d. Wiss. für 1943, Math.-naturw. Klasse*, Berlin 1944, S. 45/47), noch FERMATS kurze Zeit später entstandene *Dissertatio tripartita*, die ihm aus dem Abdruck in den *Varia opera* [82], S. 110/15 zugänglich gewesen wäre. Erst in den Ergänzungen zur *Geometria* [74], Note 4 = *BKC*, S. 678 wird auf FERMAT hingewiesen. — Die Vorstudien zu JAKOBS Abhandlung *AE* VI 1688 sind in den Art. 122, 123 und 134 der *Med.* enthalten.

[84] Zusätzlich wird in *Med.*, Art. 124 festgestellt, dass jede kubische Gleichung aus den Schnittpunkten einer gezeichnet vorliegenden kubischen Parabel mit einer konstruierbaren Geraden aufgelöst werden kann. Art. 125 gibt eine Variante der schon in Art. 117 [81] erwähnten DESCARTESschen Konstruktion aus der *Geometria*, S. 328. Art. 126 handelt von der Konstruktion der vollständigen Gleichung 9. Grades. Wahrscheinlich fällt in diese Zeit die Entstehung einer noch nicht ganz geglückten Studie über die möglichen Typen der ebenen Kurven 3. Ordnung, deren Ms. erhalten ist. Vgl. JAKOB an LEIBNIZ, Brief vom 28.II.1705 (*LMG* III, S.98) und *BJS*, S. 71.

[85] Basel 1688 = *BKC*, S. 361/73.

[86] *Th.* 15 = *BKC*, S. 371 am Schluss: Eine Linie kann als infinitesimaler Teil einer Fläche aufgefasst und zu dieser in unendlich kleines Verhältnis gesetzt werden. *Th.* 16 = *BKC*, S. 371: Ist von gleichartigen Grössen die eine endlich, die andere unendlich gross, dann haben sie das Verhältnis Null oder besser ein unendlich kleines.

[87] Basel 1689 = *BKC*, S. 375/402 = *OKl.* Nr. 171 [1], S. 3/24.

[88] Diese Vorstudien verteilen sich so:
Art. 134 = *prop.* 6, *BKC*, S. 380/81.
Art. 135 = *prop.* 10, *BKC*, S. 382.
Art. 136 = *prop.* 12, *BKC*, S. 383.
Art. 139 = *prop.* 14, Abschn. 1, 2, 4: *BKC*, S. 384/86.
Art. 140 = Stück von *prop.* 16, *BKC*, S. 393/94.
Art. 141 = *prop.* 15, *BKC*, S. 388/89.
Art. 142 = *prop.* 17, *BKC*, S. 395/97.
Art. 143 = Stück von *prop.* 16, *BKC*, S. 393 und von *prop.* 17, *BKC*, S. 398.
Art. 144 nimmt einen Teilfall aus *prop.* 19 voraus: Reihendissertation vom 28.XI.1692 = *BKC*, S. 521.

[89] Es handelt sich um die *Novae quadraturae arithmeticae*, Bologna 1650 und die *Geometria speciosa*, Bologna 1659. In den *Novae quadraturae* steht ein Divergenzbeweis für die harmonische Reihe, gestützt auf die Ungleichung $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$, ferner die Summierung der reziproken figurierten Zahlen und der Hinweis darauf, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ bisher noch nicht in geschlossener Form ermittelt worden sei. Hierzu vgl. O. SPIESS, *Die Summe der reziproken Quadratzahlen*, *Festschrift* zum 60. Geburtstag A. SPEISER, Zürich 1945, 21 S. — Die *Geometria speciosa* enthält Annäherungen für die natürlichen Logarithmen rationaler Zahlen aus Teilreihen der harmonischen Reihen.

90 Ich erwähne vor allem *prop.* 4 = *BKC*, S. 380. Sie enthält die berühmte „BERNOULLISCHE" Ungleichung $(1 + x)^n > 1 + nx$ für positive x, n ganz und $\geqq 2$. Dieser Satz stammt aus BARROW, *Lectiones geometricae* [27], Vorlesung 7, §13/16. Die Summierung der geometrischen Reihe in *prop.* 7/8 entspricht genau dem Vorgehen von VIÈTE im *Variorum... responsorum liber VIII*, Tours 1593, *cap.* 17 = *Opera* [21], S. 397/98 und ist von dort in viele spätere Fachwerke übergegangen, sodass sich die genaue Vorlage nicht feststellen lässt.

91 Dessen älteste Studien zur Reihenlehre — denen JAKOBS sehr verwandt — finden sich in den *Anecdota*, Abhandlung 150 (*BJC* IV) vor; die einschlägige Rechnung in *BJC* IV, S. 8 entspricht genau dem in *BKC*, S. 392/93 Gesagten. JOHANN ordnet die harmonische Reihe so um, dass sich schrittweise Vielfache der Reihe der reziproken Dreieckszahlen ergeben, die sich summieren lassen. Das Ergebnis ist die um 1 vermehrte Ausgangsreihe. JAKOB selbst verwendet im Grunde die Bemerkung, dass $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > \frac{2}{n}$ (gedankliche Vereinfachung des Verfahrens von MENGOLI [89]). Anschliessend wird gefolgert, dass es Reihen gibt, deren Glieder gegen Null konvergieren, ohne dass der Wert der Reihensumme endlich sein müsste.

92 Diese Reihen wurden bereits von LEIBNIZ (seit 1673) summiert. Hierüber siehe J. E. HOFMANN, *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Pariser Aufenthaltes*, München 1949, Stellen im Register unter Zahlenreihen. Auf diese Summierung hatte LEIBNIZ in den *AE* II 82 = *LMG* V, S. 121 versteckt hingewiesen. Natürlich konnte JAKOB daraus nicht erkennen, was wohl gemeint sei.

93 Oxford 1685 mit Auszügen aus den Briefen NEWTONS an LEIBNIZ vom 23.VI. und 3.XI.1676. Ersichtlich kannte JAKOB dieses Werk 1689 noch nicht, obwohl er an WALLIS' Schriften grosses Interesse zeigte.

94 Nürnberg 1689. JAKOB wusste nicht, dass der nämliche Fehler schon in P. GULDIN, *Centrobaryca*, Wien 1635/41 auftritt. Leider haben wir keine Aufzeichnung über JAKOBS Gegenbeweis.

95 Sie sind in die Reihendissertation vom 28.XI.1692 = *BKC*, S. 519/48 übergegangen. Art. 147 bezieht sich auf *prop.* 26 = *BKC*, S. 533/36, Art. 148 auf *prop.* 18 = *BKC*, S. 520/21, Art. 149 auf *prop.* 19 = *BKC*, S. 522/23.

96 *AE* X 1683 = *LMG* VII, S. 125/32.

97 *Med.*, Art. 150 ist die Unterlage für die Darstellung in *AE* V 1690 = *BKC*, S. 429/30. Vgl. ferner das Scholium zu *prop.* 59 der 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 (*BKC*, S. 970). Die in *BKC*, S. 430 nachfolgende Beziehung zur logarithmischen Kurve erscheint in etwas anderer Fassung in Art. 177 [127].

98 *Med.*, Art. 152 entspricht *AE* XI 1689 = *BKC*, S. 418/21. In der handschriftlichen Aufzeichnung findet sich ein Hinweis auf J. WALLIS, *Tractatus de sectionibus conicis*, Oxford 1655.

99 Art. 153 der *Med.* ist in den Text *BKC*, S. 416/18 übergegangen, Art. 154/56 in den Text *BKC*, S. 413/16. Der Gegenstand wird von JOHANN in den Vorlesungen 54/55 über Integralrechnung für L'HOSPITAL ebenfalls behandelt: *BJC* III, S. 539/45.

100 *Prop.* 27/35 = *BKC*, S. 536/39. — Dass diese Studien in enger Zusammenarbeit mit JOHANN durchgeführt wurden, lässt sich aus dessen Abhandlung 150 [91] erkennen. Dort sind in *prop.* 9 = *BJC* IV, S. 13 ähnliche Fragen behandelt. Allerdings ist die Meinung JAKOBS, er befinde sich mit einen iterierten Konstruktionen auf Neuland, ein erheblicher Irrtum. Ähnliches steht nämlich schon in J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Padua 1667 u. 1668, *prop* 9, wiederabgedruckt in Chr. HUYGENS, *Opera varia* II, Leiden 1724, S. 426/27.

101 *BKC*, S. 421/26. Wohl aber hat JOHANN den Gegenstand ausführlich in den Vorlesungen über Integralrechnung für L'HOSPITAL behandelt. Die hier erwähnte Stelle findet sich in Vorlesung 33/34 = *BJC* III, S. 482/86. In *OKl.* Nr. 194, Leipzig 1914, deutsch v. G. KOWALEWSKI sind die ersten 37 Vorlesungen JOHANNS enthalten, nicht aber die 22 weiteren.

102 Die Aufgabe wurde von LEIBNIZ im Verlauf einer Kontroverse mit dem Pariser Abbé CATELAN um den Begriff der Bewegungsgrösse am Ende einer Abhandlung in den *Nouvelles de la République des lettres* für September 1687 = LEIBNIZ, *Die philosophischen Schriften*, ed. C. I. GERHARDT, Berlin 1875/90 (7 Bände), im folgenden zitiert als *LPG* + Bandnummer, hier *LPG* III, S. 49/51 gestellt. HUYGENS teilte schon im Oktoberheft der nämlichen Zeitschrift = *HO* IX, S. 224/26 die Lösung mit. LEIBNIZ erwies die Richtigkeit der HUYGENSschen Auflösung in den *AE* IV 1689 = *LMG* V, S. 234/37 durch eine rein verbale Überlegung ohne algorithmische Infinitesimalbetrachtung. Er stellte gleichzeitig die wesentlich schwierigere Frage, auf welcher Linie sich ein Massenpunkt im Schwerefeld der Erde mit konstanter Geschwindigkeit

auf einen festen Punkt hinbewegt *(isochrona paracentrica)*. Erst JAKOB[101] gab für die Kurve konstanten Abstiegs eine beweisende Herleitung. Er beginnt mit $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 : y = \frac{c^2}{b}$. Daraus ergibt sich mit $\frac{dy}{dt} = b$ die Beziehung $dx = \sqrt{\frac{c^2 y}{b^3} - 1} \,.\, dy$ und durch Integration die Lösung. Hier erscheint erstmals das von JOHANN stammende und von den Brüdern BERNOULLI fortwährend verwendete neue Fachwort Integral.

[103] *BJS*, S. 97.

[104] *AE* VII 1690 = *LD* III, S. 238. LEIBNIZ rühmt hier JAKOBS Abhandlung[101] über die Kurve konstanten Abstieges, aus der deutlich hervorgehe, dass der Autor zum vollen Verständnis der LEIBNIZschen Analysis vorgedrungen sei. Wie LEIBNIZ das Problem der Kettenlinie angegriffen hat, geht aus den Mitteilungen an BODENHAUSEN vom 20.VIII.1691 (*LMG* VII, S. 370/72) hervor: Ist der Ursprung O als tiefster Punkt der eine Endpunkt der Kette und u der Abschnitt, den die Tangente des laufenden Kurvenpunktes auf der X-Achse erzeugt, dann ist $us = \int_0^s x ds$. Daraus entnimmt LEIBNIZ nach kurzer Zwischenrechnung, dass $s = c \,.\, \frac{dy}{dx} = cp$, also $dy = \frac{cpdp}{\sqrt{1+p^2}}$ und $x = c \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2cy + y^2}}$. LEIBNIZ integriert durch Übergang zur logarithmischen Funktion und konstruiert unter Verwendung der logarithmischen Kurve.

[105] *BJC* I, S. 48/51. Die eingeschlagene Methode ist deutlicher zu ersehen aus der Darstellung in den Vorlesungen über Integralrechnung, Vorlesung 12 und 36 = *BJC* III, S. 426/27 und 491/97. Auch JOHANN findet $x = c \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2cy + y^2}}$. Er konstruiert einerseits vermittels der Quadratrix $\xi \sqrt{2cy + y^2} = c^2$, andererseits aus der Fläche eines Sektors der Hyperbel $\xi = \sqrt{2cy + y^2}$, schliesslich aus der Rektifikation der Parabel $\xi^2 = 8ay$.

[106] *HO* X, S. 95/98. Wie aus den Aufzeichnungen von HUYGENS in den *HO* IX, S. 502/10 hervorgeht, sieht diese Lösung in moderner Umschrift so aus:

$$\frac{ds}{d\,tg\,\tau} = c \quad \text{also} \quad s = c \cdot tg\,\tau, \quad \rho = \frac{c}{\cos^2\tau} = \frac{c^2 + s^2}{c},$$

$$x = \int_0^s \frac{cds}{\sqrt{c^2 + s^2}}, \quad y = \int_0^s \frac{sds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \sqrt{c^2 + s^2} - c\,.$$

Das zur Darstellung von x verwendete Integral macht HUYGENS abhängig von der Quadratur der Kurve $\xi = c^2 : \sqrt{c^2 + s^2}$.

[107] *LMG* V, S. 243/47 mit Hinweisen auf das erste Auftreten des Problems bei GALILEI (*Discorsi e dimostrazioni matematiche*, Leiden 1638, *Ed. Naz.* VIII, Florenz 1898, S. 186+309/10), wobei die Kettenlinie als Parabel angesehen wird. Weiterhin wird erwähnt, dass J. JUNGIUS (*Geometria empirica*, Rostock 1627) bereits durch Rechnung und Versuch widerlegt habe, dass die Kettenlinie eine Parabel sei. Die erste theoretische Begründung gab bekanntlich der 17-jährige HUYGENS im Herbst 1646: *HO* XI, S. 36/41.

[108] Ich erwähne LEIBNIZens Aufsätze in den *AE* IX 1691 = *LMG* V, S. 255/58, in Nr. 13 des *JS* vom 31.III.1692 = *LMG* V, S. 258/63 und im *Giornale de letterati* (= *GdL*) 1692 = *LMG* V, S. 263/66.

[109] *BKC*, S. 432/40, beruhend auf den Vorarbeiten in den *Med.*, Art. 161, die jedoch nicht ganz in die Abhandlung übergegangen sind. Andererseits fehlt in den Aufzeichnungen die Rektifikation der Spirale.

[110] *AE* X 1684 = *LMG* V, S. 220/26, deutsch von G. KOWALEWSKI in *OKl.* Nr. 162, Leipzig 1908, [2] 1920, S. 3/11.

[111] Diese Bemerkung zeigt nur, dass JAKOBS Untersuchungen von BARROW ihren Ausgangspunkt genommen haben, nicht mehr. Sie lehrt uns überdies, dass JAKOB keine Ahnung von den wichtigen Vorarbeiten J. GREGORYS in der *Geometriae pars universalis*, Padua 1668 hatte, auf die sich BARROW stützen konnte. Dort hätte er übrigens auch die parabolische Spirale vorgefunden (*prop.* 66, S. 120/23), deren Fläche von GREGORY

(nicht ganz richtig) im Anschluss an mündliche Mitteilungen seines Lehrers ST. DEGLI ANGELI (Hinweis auf S. 122) bestimmt worden war. Fast gleichzeitig hatte auch R. FR. SLUSE im *Mesolabum*, Lüttich [2] 1668 (noch nicht in der Erstausgabe von 1659), *cap.* 7, S. 112/14 die Fläche der Spirale (und zwar richtig) gefunden. Diese beiden Autoren hatten ganz allgemein Kurven der Form $\left(\frac{x}{a}\right)^p = \left(\frac{y}{b}\right)^q$ (p, q ganz, positiv und teilerfremd) untersucht.

112 Sie wird auf $\int_0^y dy \cdot \sqrt{1 + \frac{4y^2(a-y)^2}{a^2c^2}}$ zurückgeführt und dann mit der Quadratur der Kurve $z^2 = a^2 + \frac{4y^2(a-y)^2}{c^2}$ in Verbindung gebracht. Bei dieser Gelegenheit fand JAKOB die rektifizierende Transformation vermöge $x = r$, $dy = rd\varphi$ wieder, die schon J. GREGORY [111], *prop.* 64, S. 116/17 und öfter und im Anschluss hieran auch BARROW [27] 1670, Vorwort zur 12. Vorlesung, verwendet hatten. Bei dieser Gelegenheit erwähnt JAKOB den Prioritätstreit zwischen Th. HOBBES und G. P. DE ROBERVAL um die Entdeckung der Bogengleichheit zwischen der ARCHIMEDischen Spirale und der gewöhnlichen Parabel (von ROBERVAL 1643 vorgetragen), über den er sich aus WALLIS [26], *De cycloide et cissoide* orientiert hatte. „Solche Auseinandersetzungen empfinde er als überflüssig; denn warum sollten nicht die nämlichen Entdeckungen selbständig an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten gemacht werden können?"

113 *BKC*, S. 442/47 in ziemlich engem Anschluss an *Med.*, Art. 162. JAKOB erwähnt zwar als Vorgänger BARROW (*Lectiones geometricae* [27], Vorlesung 11, § 26), weiss jedoch nichts von J. GREGORY, der in den *Exercitationes geometricae*, London 1668, S. 14/17 viel weiter vorangeschritten war.

114 Das ist zwar einschliesslich der Reihenentwicklung enthalten in der LEIBNIZschen Abhandlung *AE* IV 1691 = *LMG* V, S. 130/32, aber wahrscheinlich war JAKOBS MS. beim Erscheinen dieses *AE*-Heftes bereits in Leipzig.

115 *BKC*, S. 448/49. Ersichtlich wusste JAKOB nichts von der ähnlichen Behandlung bei A. GIRARD, *Invention nouvelle en algèbre*, Amsterdam 1629, fol. $g\,2r/h\,3v$. In Art. 194 der *Med.* gibt er dann (unter Rückbeziehung auf seine Lösung der Florentiner Aufgabe in den *AE* VIII 1692) den heute üblichen Beweis. Dass dieser Beweis schon in B. CAVALIERI, *Directorium generale uranometricum*, Bologna 1632, *cap.* VIII, S. 315 steht, war ihm ebenfalls unbekannt.

116 *BKC*, S. 449/51. Mit den nämlichen Fragen befasste sich JOHANN in der 38./41. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 497/507. In den *Med.* wird diese Frage nicht behandelt.

117 *BKC*, S. 451/52. JAKOB gibt hier Ergebnisse aus *Med.*, Art. 170 wieder. Dort war er von $dy = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ mit $\xi = \frac{a}{2}$, $d\eta = \frac{dx}{dy} \cdot d\xi$ zu $d\eta = \frac{\sqrt{a^4 - 16\xi^4}}{4\xi^2} \cdot d\xi$ gekommen. Nun wird vermittels $\sqrt{\cdots} = \frac{t\xi^2}{a} - a^2$ transformiert, nach Potenzen von $1:t$ entwickelt und dann gliedweise integriert. Diese Überlegungen sind in etwas abgeänderter Form in *prop.* 60 der 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 = *BKC*, S. 970/71 übergegangen.

118 In Art. 165 der *Med.* wird die Differentialgleichung dieser Kurve auf die Form $d^2x : dy = dy^3 : \int dy^3$ (mit der Bogenlänge s als der unabhängigen Veränderlichen) gebracht. Es ist also $a^2 \frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3$. — In *BJS*, S. 99/101 wird über den mutmasslichen Inhalt von 5 zwischen JAKOB und JOHANN gewechselten Briefen aus dem ersten Drittel des Jahres 1691 berichtet, die grösstenteils von der Velaria gehandelt haben dürften. Damals befand sich JOHANN in Genf, wo er bei dem Arzt D. LECLERC wohnte und unter anderem dem Ingenieur J. CHR. FATIO DE DUILLIER Unterricht in Differentialrechnung erteilte. Die Velaria wird von JOHANN erstmals in der 33. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 510/12 behandelt. Dort und in Nr. 16 des *JS* vom 28.IV.92 = *BJC* I, S. 59/61 wird festgestellt, dass die Velaria mit der Kettenlinie identisch ist. Hier wird JOHANN zum erstenmal öffentlich gegen den Bruder ausfällig mit der Behauptung, dieser habe zwar das Velaria-Problem gestellt, jedoch nicht gelöst. JAKOB hat die ihm angetane Kränkung niemals verwunden, zumal er bis dahin jede sich bietende Gelegenheit wahrgenommen hatte, um auf des Bruders Entdeckungen hinzuweisen. Seit diesem Zeitpunkt finden sich in JAKOBS Abhandlungen — zunächst versteckt, später ganz offen — abschätzige Bemerkungen über JOHANNS fachliche Leistungen. Die Übereinstimmung zwischen der Velaria und der Kettenlinie steht auch

in den *Med.*, Art. 188 und ist von hier aus andeutungsweise in *AE* V 1692 = *BKC*, S. 484/90 übergegangen. Dieser Aufsatz wurde am 19.III.1692 (*BKC*, S. 481) nach Leipzig gesandt.

[119] Von diesem Gegenstand handeln auch die Art. 164 und 189 der *Med.* JOHANN beschäftigt sich mit ihm in der 34. und 35. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 512/16. Beide stellen fest, dass die Lintearia mit der Elastica identisch ist. An der Darstellung JOHANNS hat JAKOB später in den *AE* XII 1695 = *BKC*, S. 655 deutlich Kritik geübt. Hierzu vgl. auch *BJS*, S. 111, Anm. 13.

[120] LEIBNIZ äussert sich in den Bemerkungen zum Problem der Kettenlinie *AE* IX 1691 = *LMG* V, 257/58 zu JAKOBS unterstellter Abhängigkeit von BARROW mit einem Bericht über die Pariser Studien, der sich auf Grund der nachgelassenen Aufzeichnungen bis ins kleinste nachprüfen und als richtig erkennen lässt. Vgl. hierzu HOFMANN [92]. Vor allem betont LEIBNIZ, dass ihm die wichtigsten Anregungen aus PASCAL und GREGORIUS A ST. VINCENTIO zugeflossen sind. Als er GREGORYS Werke [100, 111, 113] durchstudierte, hatte er die Transmutationsmethode, vermittels deren er alle damals bekannten Quadraturen auf einheitlicher Grundlage erweisen und zu interessanten Neuentdeckungen fortschreiten konnte, bereits erfunden. BARROWS *Lectiones geometricae* [27] hat er sogar erst nach der Erfindung des Calculus näher durchstudiert und nun nicht mehr Neues daraus entnehmen können. Die genauere Darlegung, die LEIBNIZ über seine ersten Studien in Paris an JAKOB gehen lassen wollte (PS zum Brief vom April 1703 = *LMG* III, S. 71/73), wurde leider nicht abgesandt; übrigens hätte sie an JAKOBS damals bereits verhärteter Einstellung schwerlich noch etwas ändern können. Dessen ganzes Verhalten zeigt, dass er die in manchen grundsätzlichen mathematischen Fachfragen deutlich spürbare geistige Überlegenheit LEIBNIZENS als unerträgliche Anmassung empfand. Dass das Schwergewicht der LEIBNIZschen Fachleistung in der vereinheitlichenden calculmässigen Zusammenfassung der damals zugänglichen Infinitesimalprozesse liegt, für die es überhaupt kein Vorbild gab, scheint JAKOB ebensowenig wie den übrigen mathematischen Experten der damaligen Zeit aufgegangen zu sein. JAKOB steigerte sich immer mehr in ein gänzlich unbegründetes Misstrauen gegen LEIBNIZ und MENCKE (den Herausgeber der *AE*) hinein und glaubte allen Ernstes, es sei beider Absicht, seine eigene Leistung zu verkleinern. Dazu tritt, dass er den Versuch LEIBNIZENS, in den heftigen Auseinandersetzungen zwischen ihm und dem Bruder zu vermitteln, ungerechtfertigterweise als Parteinahme für JOHANN deutete. Deshalb stellte er sich in der Auseinandersetzung zwischen LEIBNIZ und FATIO seit 1699 hinter den Kulissen gegen LEIBNIZ, wie aus den noch ungedruckten Briefen an FATIO aus dieser Zeit deutlich zu erkennen ist. Leider war der fachliche Scharfblick, der ihm in so vielen andern Fachfragen eigen war, in dieser Angelegenheit durch Überempfindlichkeit allzusehr getrübt.

[121] In der *Histoire des ouvrages des sçavans* (= *HOS*) II 1693 = *HO* X, S. 408/13. Dass NEWTON die Lösung des Problems schon im Brief an OLDENBURG für LEIBNIZ vom 3.XI.1676 = *LMG* I, S. 145 gekennzeichnet hatte, war damals noch nicht an die Öffentlichkeit gedrungen.

[122] Vgl. *BJS*, S. 114. Der Inhalt des Art. 169 der *Med.* ist übergegangen in *prop.* 51 der 4. Reihendissertation vom 26.XII.1698 = *BKC*, S. 860/63.

[123] Art. 173 der *Med.*, übergegangen in *prop.* 42 der 3. Reihendissertation vom 24.XI.1696 = *BKC*, S. 355/56. Als Vorlage wird die WALLISsche *Mechanik* [26], S. 550 genannt, woselbst das Vorgehen N. MERCATORS [73] verbessert dargelegt wird.

[124] Art. 174 der *Med.*, übergegangen in *prop.* 53 der 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 = *BKC*, S. 958/60. Dieses Stück wurde von JAKOB am 14.III.1696 als Beitrag zu dem geplanten, jedoch nicht ausgeführten umfangreichen LEIBNIZschen Werk über die *Scientia infiniti* nach Hannover gesandt (*LMG* III, S. 35/36). Ersichtlich wusste JAKOB damals noch nicht, dass sich die allgemeine binomische Reihe bereits unter den Auszügen befand, die WALLIS aus den beiden grossen Briefen NEWTONS für LEIBNIZ vom Jahr 1676 in die *Algebra*, Oxford 1685 = *Opera* II, Oxford 1693 übernommen hatte. Inzwischen war aber auch Band III, Oxford 1699 der WALLISschen *Opera* erschienen, worin auf S. 634/45 der volle Wortlaut des NEWTONschen Briefes [121] abgedruckt ist. Aus diesem Text geht hervor, dass NEWTON anfangs genau so wie JAKOB vorgegangen ist, um die binomische Reihe durch Interpolation aus den Ergebnissen für ganze positive Exponenten in der WALLISschen *Arithmetica infinitorum* [26], *prop.* 172 ff. herzustellen. Zum Gegenstand vgl. auch J. E. HOFMANN, Abh. Nr. 2 der *Preuss. Ak. d. Wiss. für 1943, Math.- naturw. Klasse*, Berlin 1943, S. 100/03.

[125] Art. 175 der *Med.*, übergegangen in *prop.* 56/57 der 5. Reihendissertation von 8.IV.1704 = *BKC*, S. 962/64. Auch dieses Stück lag als Beitrag zur LEIBNIZschen *Scientia infiniti* [124] dem Brief vom 14.III.1696 bei: *LMG* III, S. 36/37.

126 Art. 176 der *Med.* JAKOB setzt zunächst $a = 2c$ und $\sqrt{c^2 + y^2} = z$. Nun hat er $\frac{z^2\,dz}{\sqrt{z^2 - c^2}} = \left\{z + \frac{c^2}{2z} + \frac{1 \cdot 3\,c^4}{2 \cdot 4\,z^3} + \cdots\right\} dz$ zu integrieren. Da hierbei auch ein logarithmisches Integral auftritt, ist sein Ansatz praktisch wertlos. Ähnlich, sagt er, könne man auch bei der Darstellung der Kettenlinie durch den Bruder vorgehen, indem man $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ entwickle. Er bezieht sich hier auf JOHANNS Abhandlung *AE* VI 1691 [105], die er selbst nach Leipzig gesandt hatte, und zwar schon gegen Ende 1690. — Der hier angeführte Art. 176 der *Med.* ist im Frühjahr 1691 niedergeschrieben.

127 Art. 177 der *Med.* Vgl. dazu die Abhandlung *AE* V 1690 [97], auf die im Text angespielt wird. E. HALLEY führt den nämlichen Gedanken in ähnlicher Unvollkommenheit durch in den *PT* 19, Nr. 216 für III/V 1695, S. 58/67. Vgl. ferner *prop.* 59 der 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 (*BKC*, S. 967/69).

128 Art. 178 der *Med.*: Das Ganze ist in modifizierter Form in die Akademie-Abhandlung von 1702 (*BKC*, S. 922/28) übergegangen. Schon in Art. 159 der *Med.* hatte JAKOB im Anschluss an die vorangegangenen Vielecksberechnungen [61] bemerkt, dass sich die Umfänge u_n und die Flächen f_n der regelmässigen Vielecke im Kreis des Halbmessers a so darstellen lassen:

$$u_4 = 4a\sqrt{2}, \quad f_4 = 2a^2;$$
$$u_8 = 8a\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad f_8 = 4a^2\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$
$$u_{16} = 16a\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad f_{16} = \cdots; \text{ usw.}$$
$$u = 4 \cdot 2^\infty a\sqrt{2 - \sqrt[\infty]{2}}\ (sic!),\ f \cdots .$$

Ähnliche Gedanken liegen den Entwicklungen in VIÈTES *Varia responsa* [90], *cap.* 18 = *Opera*, S. 400 zu Grunde, die zur Herstellung des unendlichen Wurzelproduktes für $\frac{4}{\pi}$ geführt haben.

129 *LMG* V, S. 128/32, insbes. S. 129.

130 *BJS*, S. 101.

131 *BJS*, S. 105.

132 *LMG* I, S. 115/16. Vgl. HOFMANN [92], S. 154. Die in *BJS*, S. 105 gegebene Wiederherstellung des Verfahrens von JAKOB entspricht genau dem LEIBNIZschen Vorgehen. Übrigens kennt auch JAKOB diese rationalisierende Transformation. Er bedient sich ihrer in *prop.* 45 der 3. Reihendissertation vom 24.XI.1696 = *BKC*, S. 760/61 zur Kreisquadratur.

133 Art. 179 der *Med.* Zum Gegenstand vgl. J. E. HOFMANN in *Centaurus 3*, 1954, S. 279/95. Aus der mir damals noch unzugänglichen Bemerkung L'HOSPITALS an JOHANN vom 16.V.1693 (*BJS*, S. 169) geht im Gegensatz zu meiner Annahme (S. 287) hervor, dass L'HOSPITAL seine Lösung unabhängig von JOHANN gefunden hat. Dieser hat den Gegenstand erst nachher mit L'HOSPITAL durchgesprochen (4. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 403/05). Übrigens geht aus dem Unvermögen JAKOBS erneut die Unkenntnis der *Varia opera* [82] FERMATS hervor; denn dort war die Fläche des Blattes bereits in geschlossener Form angegeben worden.

134 Art. 166 der *Med.* Hierzu vgl. auch *BJS*, S. 111, Anmerkung 11.

135 *AE* I 1692 = *BJC* I, S. 52/59. Nach *BJS*, S. 106 war der erste Teil des Aufsatzes bereits gegen Ende 1690 abgeschlossen und sollte durch JAKOBS Vermittlung nach Leipzig gesandt werden. Dieser machte jedoch zusätzliche Bemerkungen über eine vereinfachte Evolutenbestimmung (*BJC* I, S. 57/59), die von JOHANN in den Aufsatz eingefügt wurden. Deshalb ging die Sendung erst im Spätherbst 1691 aus Basel ab. Die Abhandlung JOHANNS war die berichtigende Antwort auf mehrere ohne Begründung mitgeteilte und zum Teil irrige Ergebnisse, die E. W. v. TSCHIRNHAUS in den *AE* XI 1682 und I 1687 veröffentlicht hatte. Schon in einer dritten Mitteilung *AE* II 1690 bezieht sich TSCHIRNHAUS auf Einwände JOHANNS, über die er wohl durch seinen Leipziger Freund O. MENCKE unterrichtet worden war. JOHANN hat die Kurve auch in der 26./28. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 464/71 eingehend behandelt.

136 LEIBNIZens Aufsatz erschien in den *AE* IV 1692 = *LMG* V, S. 266/69. In den *AE* VII 1694 = *LMG* V, S. 301/06 ist sein Gedankengang genauer ausgeführt und wird an einem hübschen Beispiel erläutert. JAKOB stellt dann in den *AE* X 1694 = *BKC*, S. 618/22 fest, dass seine Regel (von der LEIBNIZens nur unterschieden durch die Anwendung der HUDDEschen Tangentenregel anstelle jener der Differentialrechnung) zum nämlichen Ergebnis führt. Bei dieser Gelegenheit gibt er auch eine infinitesimal-

geometrische Konstruktion, die er in Art. 268 der *Med.* zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer gegebenen Kurve verwendet. In den Anmerkungen zur *Geometria* [74], Note 7 = *BKC*, S. 680/84 erscheint die Einhüllende der Parabelschar $y^2 = cx - c^2$, ferner die Einhüllende der Wurfparabeln fester Anfangsgeschwindigkeit im Ausgangspunkt [134]; beidemale wird recht einfach auf algebraischem Wege (aus der Doppelwurzel) gerechnet.

[137] Über die Einzelheiten siehe *BJS*, S. 136/37.

[138] Die Vorlesungen über Differentialrechnung [63] wurden später von L'HOSPITAL als Unterlage für die vielgelesene *Analyse des infiniment petits* verwendet. Hier die einzelnen Auflagen: Paris 1696, [2]1715, [3]1716, [4]1768 (+ Titelauflage 1769), ed. A. H. PAULIAN; [5]1781, ed. L. LEFÈVRE-GINEAU; engl. v. E. STONE, London 1730, lat. v. K. SCHERFFER, Wien 1764. Das lange als verloren angesehene MS. JOHANNS wurde in einer späteren Abschrift 1920 von P. SCHAFHEITLIN in der Basler Universitätsbibliothek wiederaufgefunden und im Original in den Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel *34*, 1922, in deutscher Übersetzung in *OKl.* Nr. 211, Leipzig 1924 herausgegeben. Über die Abhängigkeit der *Analyse* von JOHANNS Unterweisungsheften im einzelnen vgl. *BJS*, S. 149/55; über die Integralrechnung vgl. [101].

[139] Vgl. *BJS*, S. 136. Die Formel ist in JAKOBS Aufsatz in den *AE* I 1691 = *BKC*, S. 436 noch nicht enthalten. Aus den Hinweisen JAKOBS in den *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 559 und VI 1694 = *BKC*, S. 577 geht hervor, dass die beiden Brüder unabhängig von einander im Herbst 1691 zu dieser Formel vorgestossen waren. Die früheste Anwendung bei JAKOB findet sich in Art. 181 der *Med.*, wo der Ausdruck für den Krümmungsradius der logarithmischen Kurve, dessen Minimum und anschliessend die Kurvenevolute bestimmt werden.

[140] Art. 185 der *Med.*, erwähnt in den *AE* V 1692 = *BKC*, S. 492/93.

[141] *LMG* VII, S. 329/31. Auf diese Abhandlung bezieht sich JAKOB schon im Schlusssatz der Abhandlung in den *AE* I 1691 = *BKC*, S. 442. In den Zusätzen zu JOHANNS Abhandlung über die Catacaustica des Kreises [135], enthalten in den *AE* III 1692, hatte sich JAKOB mit der irrigen Ansicht LEIBNIZens (in den *AE* VI 1686 = *LMG* VII, S. 326/29) auseinandergesetzt, wonach der Krümmungskreis die Kurve in 4 zusammenfallenden Punkten treffen sollte, und den Fehler berichtigt (*BKC*, S. 480). LEIBNIZ gab seinen Irrtum in den *AE* IX 1692 = *LMG* V, S. 279/85 = *LMG* VII, S. 331/37 freimütig zu. Gegen Ende der Abhandlung behauptete LEIBNIZ, die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = a\,\frac{d^2y}{ds^2}$ führe auf die logarithmische Kurve, musste sich jedoch von L'HOSPITAL sagen lassen (Brief an LEIBNIZ vom 24.II.1693 = *LMG* II, S. 226. Das Ergebnis ist auch eingeflochten in JAKOBS Aufsatz in den *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 570/71), dass dies nicht richtig sei; wohl aber lasse sich die Lösung vermittels der logarithmischen Kurve konstruieren.

[142] Art. 185 der *Med.*, übergegangen in die *AE* V 1692 = *BKC*, S. 494/97.

[143] Art. 186 der *Med.*, übergegangen in die *AE* V 1692 = *BKC*, S. 497/502. Zu ähnlichen Ergebnissen war auch JOHANN vorgedrungen: Vorlesungen 24 und 32 über Integralrechnung = *BJC* III, S. 459/60 + 481.

[144] Damit drückt JAKOB aus, dass diese Spirale ihre eigene Evolute ist: *AE* V 1692 = *BKC*, S. 502.

[145] Dieser Wunsch wurde zwar erfüllt, jedoch nur unvollkommen; in der Hand des Steinmetzen wurde aus der logarithmischen Spirale eine ARCHIMEDische.

[146] *BJS*, S. 119.

[147] Art. 192 der *Med.*

[148] *BKC*, S. 503/10. Damals wusste JAKOB noch nichts von des Bruders kränkender Bemerkung im *JS* vom 28.IV.1692 [118]. Deshalb hat er sich wiederum bemüht, JOHANNS Verdienste kund zu machen. JOHANNS erste Aufzeichnungen zur Catacaustica der gemeinen Zykloide kennen wir nicht, wohl aber die näheren Ausführungen in der 31. und 32. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 478/81.

[149] *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 549/59. Es handelt sich um einen in der Hauptsache aus Art. 195 der *Med.* entnommenen Bericht. Der Anfang der Aufzeichnung ging am 14.III.1696 (*LMG* III, S. 41/42) als Beitrag zur geplanten *Scientia infiniti* an LEIBNIZ. Ein veränderter Auszug aus Art. 195 steht im Nachlass, Stück 17 (*BKC*, S. 1077/80). JOHANN bemächtigte sich dieses Gegenstandes in der 56./58. Vorlesung über Integralrechnung = *BJC* III, S. 546/58.

[150] *BKC*, S. 577/78. JAKOB schreibt die Formel so (den Krümmungsradius bezeichnet er fast durchwegs mit z): $dxds : ddy = z = dyds : ddx$. Er gibt einen infinitesimalen Beweis auf rein geometrischer Grundlage; über den Vorzeichenunterschied ist er sich deshalb noch nicht im klaren. Anschliessend folgen dann verschiedene Formeln für den Krümmungsradius bei Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten, wie wir heute

sagen würden. JAKOB verwendet jedoch nicht r, φ, sondern r und $t = a\varphi$ als Bestimmungsstücke.

150a Noch ohne die Bezeichnung *theorema aureum* findet sich der Satz in Art. 187 der *Med.* Hier bedient sich JAKOB des Ansatzes $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{t}$, um Differentialgleichungen 2. Ordnung auf solche erster Ordnung zurückzuführen. Er setzt im Grunde

$$\frac{dx}{ds} = \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + t^2}}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\ldots}^3}\frac{dt}{ds} = \frac{a^2}{t(a^2 + t^2)} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Die Wirksamkeit dieses Verfahrens wird an drei Beispielen auseinandergesetzt. Aus $a\frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3$ entnimmt JAKOB $dx = \frac{tdt}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, also $dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (Identität der Kettenlinie mit der Velaria). Von $a^2 = \rho x = x\frac{dy}{ds} : \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x\,dx\sqrt{a^2 + t^2}^3}{a\,t\,dt}$ geht er zu $xdx = \frac{a^3 t\,dt}{\sqrt{a^2 + t^2}^3}$, also $\frac{x^2}{2} = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 + t^2}}$, $t = \frac{a\sqrt{4a^4 - x^4}}{x^2}$, $dy = \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4a^4 - x^4}}$ über (Elastica). Hier kommt er nur durch Kompensation der beiden Vorzeichenfehler zu Erfolg. Der für ρ verwendete Ausdruck $\frac{dy}{ds} : \frac{d^2x}{ds^2}$, in der Originalschreibweise $\frac{dyds}{ddx}$, ist das *theorema aureum*. Im dritten Beispiel $y\frac{d^2y}{dx^2} = 1$ bildet JAKOB aus $\frac{tdy}{dx} = a$ durch Differentiieren $t\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} = 0$, d.h. in seiner Schreibweise $td^2y = -dydt$, also $\frac{dy}{y} = -a^2\frac{dt}{t^3}$. Ausserdem erwähnt JAKOB den Ansatz $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{a}$. Sein Verfahren ist mit der Einführung von $p = y'$ als Parameter gleichwertig. Der erste gedruckte Hinweis auf ein neues Kunstmittel zur Behandlung von Krümmungsfragen befindet sich in den *AE* VI 1693 (*BKC*, S. 559).

151 S. 433/37. TSCHIRNHAUS hat hier Halbverstandenes aus LEIBNIZens Pariser Studien wiedergegeben, die im Anschluss an GREGORYS *Vera quadratura* 100 entstanden waren und die Frage entscheiden sollten, ob GREGORYS vorgeblicher Beweis für die Unmöglichkeit der „analytischen" Kreisquadratur durch zusätzliche Existenztheoreme schlüssig gemacht werden könne oder nicht. Zum Gegenstand vgl. J. E. HOFMANN und H. WIELEITNER, *Archiv für Gesch. d. Math., der Naturw. u. der Technik 13*, Leipzig 1931, S. 277/92.

152 *AE* V 1684 = *LMG* V, S. 123/26 nebst Ergänzung in den *AE* XII 1684, sogleich verbessert in *LMG* V, S. 126/27. LEIBNIZ kam auf die Angelegenheit nochmals in den *AE* VI 1686 = *LMG* V, S. 226/33 zurück, wo er sich unter anderem auch gegen die Unterstellung von J. CRAIG in dessen *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi*, London 1685 verwahrte, er sei der Autor des (nur mit D. T. signierten) Aufsatzes 151 gewesen. Bei dieser Gelegenheit berichtet übrigens LEIBNIZ ziemlich ausführlich über seine Pariser Studien (*LMG* V, S. 230/32) und über seine Stellung zu BARROW. Vgl. hierzu 120. Weiterhin berichtigt er einen nebensächlichen Rechenfehler im Aufsatz *AE* V 1684.

153 *AE* IX 1687, S. 524/27. TSCHIRNHAUS hat diesen hübschen Satz womöglich nicht selbst gefunden, sondern aus einer Jugendschrift des A. DE LIONNE entnommen, die von V. LÉOTAUD als Beigabe zum *Examen circuli quadraturae* (Lyon 1654) herausgegeben worden war. Vgl. hierzu H. WIELEITNER, *Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde*, ed. J. E. HOFMANN, Wissensch. Beilage zum Jahresbericht des Neuen Realgymnasiums München für 1933/34, S. 42/44. Auf die neuerliche Behauptung TSCHIRNHAUSens ist LEIBNIZ nicht mehr ausführlich eingegangen; er spielt nur in kurzen Worten in den *AE* IX 1691 = *LMG* V, S. 256 auf die Angelegenheit an.

154 London 1687 und öfter. Ich beziehe mich auf die Wiedergabe in den *Opera quae extant omnia*, ed. S. HORSLEY, London 1779/85, Bd. II, 1779, S. 126.

155 *AE* I 1691 = *BKC*, S. 440. In den Aufzeichnungen *Med.* Art. 161 fehlt diese Behauptung.

156 Der Beweisgedanke von JAKOB sieht so aus: Wenn das Oval von einer algebraischen Kurve gebildet wird, dann gibt es eine algebraische Beziehung zwischen φ und tg φ. Sie muss zu tranzendenten Werten von φ führen, weil sie unendlich viele Lösungen aufweist.

157 *LMG* V, S. 256. Bei dieser Gelegenheit bezieht sich LEIBNIZ auf das Urteil von HUYGENS, der im Brief vom 26.III.1691 (*HO* X, S. 57) als Gegenbeispiel gegen NEWTON die „ovale" Fläche zwischen zwei symmetrisch gelegenen Parabeln anführt.

158 Beilage zum Brief an LEIBNIZ vom 14.III.1696 = *LMG* III, S. 39/40. Hier hat JAKOB seinem Entwurf (*Med.*, Art. 190) noch erläuternde Zusätze beigefügt. Das Beispiel erscheint übrigens auch im Brief LEIBNIZens an HUYGENS vom 19.II.1692 (*HO* X, S. 262), der den Sachverhalt sofort durchschaute (ebenda), ferner im Brief LEIBNIZens an BODENHAUSEN vom 5.X.1692 (*LMG* VII, S. 374/75). Dort wird auf die LIONNEsche Quadratur[153] verwiesen, jedoch mit der höflichen Bemerkung, das könne TSCHIRNHAUS leicht auch selbständig gefunden haben. Schon früher hatte L'HOSPITAL durch JOHANN eine Abschrift des Art. 190 erhalten (erwähnt im Brief L'HOSPITALS an JOHANN vom 2.I.1693 = *BJS*, S. 162). L'HOSPITAL hat es nicht für nötig befunden, auf dieses Manuskript JAKOBS hinzuweisen, jedoch an LEIBNIZ am 15.VI.1693 (*LMG* II, S. 242/43) eine hübsche Erweiterung gehen lassen. Sie ist in den *HMP* vom 29.I.1701 (Druck 1704) näher ausgeführt.

159 *BKC*, S. 650/51.

160 *LMG* V, S. 330.

161 Dass die gemeinen Epizykloiden rektifizierbar sind, war bereits allgemein bekannt.

162 *BKC*, S. 736.

163 *BKC*, S. 758.

164 Ich nenne zunächst *Med.*, Art. 180 über den Lichtweg in Luft verschiedener Dichte, der durch einige Ausführungen am Ende von Art. 202 (Behandlung von Differentialgleichungen ohne Kurvenquadratur) ergänzt wird. Das hier Dargelegte ist fast unverändert übergegangen in Stück 14 des Nachlasses (*BKC*, S. 1063/67). Art. 182 handelt im Anschluss an den *Traité de la lumière*, Leiden 1690 (= *HO* XIX) vom Verlauf der HUYGENSschen Wellen in Luft verschiedener Dichte. Dann folgt in Art. 206 die bereits erwähnte barometrische Höhenformel[65] mit eingehender Tabelle = Nachlass-Stück 15 (*BKC*, S. 1067/74). Im Zusammenhang mit dem Brachystochronenproblem spielt JAKOB auf die Aufzeichnungen in den Artikeln 180, 182 und 202 an. Unklar bleibt, inwieweit JAKOB von JOHANNS Bemerkungen über den Lichtweg in inhomogenen Medien beeinflusst sein könnte (vgl. dessen Briefe an JAKOB vom Ende April und 22.V.1691 = *BJS*, S. 101/02). Dessen eigener Ansatz steht in der 46. Vorlesung über Integralrechnung (*BJC* III, S. 516/18) und findet sich wieder in der Lösung des Brachystochronenproblems (*AE* V 1697 = *BJC* I, S. 190/91).

165 Diese Untersuchungen sind veranlasst durch die *Théorie de la manœuvre des vaisseaux* (Paris 1689) des Marine-Ingenieurs B. RENAU, auf deren Unzulänglichkeit JAKOB in den *AE* V 1692 (*BKC*, S. 484/89) hinwies. Was er dort im Zusammenhang mit den Studien über die Velaria[118] andeutet, ist aus Art. 182 der *Med.* entnommen. JAKOB bemerkte jedoch alsbald, dass er sich geirrt hatte (Eintrag in Art. 188), ausdrücklich zugegeben in den *AE* XII 1695 = *BKC*, S. 656. Ein etwas anderer Ansatz findet sich in Art. 196 (gekürzt im Nachlass, Stück 18 = *BKC*, S. 1080/82), weiteres in den *AE* VI 1693 (*BKC*, S. 562/63). Etwas später hat sich auch HUYGENS kritisch mit RENAU auseinandergesetzt (*Bibliothèque universelle et historique* [= *BUH*] IX 1693 = *HO* X, S. 525/31). Die Folge war eine lange Kontroverse der Jahre 1694/95 zwischen HUYGENS und RENAU (*HO* X). JAKOB war jedoch auch mit der Auffassung von HUYGENS nicht ganz zufrieden (*AE* XII 1695 = *BKC*, S. 658/59). LEIBNIZ nahm nur kurz gegen RENAU Stellung (*AE* III 1696 = *LMG* V, S. 330). Jetzt wurde JAKOB etwas ausführlicher (*AE* VII 1696 = *BKC*, S. 737/38). Hier stützte er sich auf Art. 234 der *Med.* (Nachlass, Stück 13 = *BKC*, S. 1057/61). Etwas später entstand Art. 255 (Nachlass, Stück 13 = *BKC*, S. 1061/62). Auch diese Versuche können nicht voll befriedigen. Eine abschliessende Darstellung fand der Gegenstand in JOHANNS *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux*, Basel 1714 (= *BJC* III, S. 1/96). Dort ist (*BJC* III, S. 97/167) auch die weitere Diskussion zwischen RENAU und JOHANN abgedruckt. Schliesslich sei auf Art. 279 der *Med.* (Nachlass Stück 27 = *BKC*, S. 1109/15) hingewiesen, der von der Bewegung eines Bootes durch Anschlagen eines Pendels im Boot handelt.

166 Diese Untersuchungen setzen mit *Med.* Art. 196 ein, auf die sich die zum Teil weiterführenden Mitteilungen in den *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 563/70 beziehen. JAKOB nimmt den Widerstand eines Profils, gegen das die Flüssigkeit von unten her laminar strömt, proportional zu $\int_a^b \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 dx : \int_a^b dx$ an. Der Gegenstand wird nochmals in den *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 659) und in den Artikeln 234 und 255 (Nachlass, Stück 13 = *BKC*, S. 1057/61) berührt. Vgl. auch *AE* VII 1696 (*BKC*, S. 738).

167 Auf diesen Gegenstand wird — ausser der Ersterwähnung in den *AE* VI 1691[117], die LEIBNIZ zu einem interessierten Hinweis in den *AE* IX 1691 (*LMG* V, S. 257)

veranlasst hatte — nochmals vorankündigend in den *AE* V 1692 (*BKC*, S. 490) und VI 1693 (*BKC*, S. 549) hingewiesen, ehe sich JAKOB zur endgültigen Veröffentlichung in den *AE* VI 1694 (*BKC*, S. 580/600) entschliesst. Allerdings sieht er sich in den *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 656) zur Zurücknahme einiger über die Lintearia aufgestellten Behauptungen (*BKC*, S. 598/99) veranlasst. In Art. 187 [150a] der *Med.* gibt JAKOB eine verbesserte Herleitung der speziellen Elastica-Gleichung, stellt in Art. 189 [119] die Identität der Elastica mit der Lintearia fest (vgl. den Hinweis in den *AE* VI 1694 = *BKC*, S. 597) und untersucht in Art. 198 die Deformation einer rechteckigen Haut bei Längsdehnung und gleichzeitiger Querkontraktion.

[168] JAKOB kann das noch nicht direkt hinschreiben. Er bedient sich vielmehr einer für uns überflüssigen Hilfsgrösse t, die er vermöge $ady = tds$ einführt. Die Darstellung in Art. 205 ist in ihrer Kürze und Übersichtlichkeit viel leichter lesbar als die ausführlichere in den *AE* VI 1694 (*BKC*, S. 580/81).

[169] *BKC*, S. 580/81. Vorarbeit: Einschaltung nach Art. 207 bezw. 215 der *Med.* In Art. 207 wird die LEIBNIZsche Regel für das Zusammensetzen von Einzelkräften nach dem Parallelogrammsatz bewiesen, die in Nr. 35 des *JS* vom 7.IX.1693 (*LMG* VI, S. 231/33) enthalten ist. In Art. 208 behandelt JAKOB eine sehr einfache algebraische Aufgabe aus der Disputation des Mediziners S. BATTIER vom 30.XI.1693. Darnach dürfte der Zusatz zu Art. 207 im Spätherbst 1693 entstanden sein.

[170] Art. 217 der *Med.*, übergegangen in *prop.* 58 der 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 (*BKC*, S. 964/66). In den *AE* VI 1694 (*BKC*, S. 596) wird nur das Ergebnis mitgeteilt, nicht die Methode.

[171] Art. 216 (Nachlass, Stück 20 = *BKC*, S. 1084/86) wird erwähnt in den *AE* VI 1694 (*BKC*, S. 600). JAKOB geht aus von dem Ansatz $a^2 = \rho s = -(sic)\, s \frac{dx}{ds} : \frac{d^2y}{ds^2}$. Er bildet $a^2\, d\frac{dy}{dx} = -sdx = -adt$ (Definition der Hilfsgrösse t) und integriert so: $a\frac{dy}{ds} = a\,(sic) - t$. Nun ist $a\frac{dx}{ds} = \sqrt{2at - t^2}$, ferner $\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{ds}{dx} = 1 : \sqrt{2at - t^2}$ usw. Der Kürze halber ist die Ausdrucksweise etwas modernisiert.

[172] Die Aufgabe stammt von V. VIVIANI, dem letzten Schüler GALILEIS, der sich unter dem Pseudonym *A. D. Pio Lisci Pusillo Geometra* (statt *A[utore] postremo Galilei discipulo*) verbarg. Sie befindet sich auf einem vom 4.IV.1692 datierten Flugblatt. Schon am 1.V.1692 gab VIVIANI seine eigene Auflösung, die unter dem Titel *Formazione e misure di tutti i cieli* zu Florenz gedruckt wurde. Sie ist wiederabgedruckt in G. GRANDI, *Geometrica demonstratio Vivianorum problematum*, Florenz 1699. Lösungen gaben L'HOSPITAL (derzeit verschollen, sichergestellt aus der Mitteilung an HUYGENS vom 23.XI.1692 = *HO* X, S. 346), ferner LEIBNIZ (*AE* VI 1692 nebst berichtigender Ergänzung in den *AE* I 1693, beides vereinigt in *LMG* V, S. 274/78), dann JAKOB (*AE* VIII 1692 = *BKC*, S. 512/15), WALLIS (Brief vom 12.IX.1692, abgedruckt in den *PT 17*, Nr. 197 vom I 1693, S. 584/92, übergegangen in *Cap.* 192 der *Algebra* = *Opera* II, 1693), JOHANN (nicht veröffentlicht, erwiesen aus JAKOBS Bemerkung in den *AE* VI 1693 = *BKC*, S. 571/72 und dem Brief JOHANNS an L'HOSPITAL vom 22.VII.1694 = *BJS*, S. 232), DAVID GREGORY (PT *19*, Nr. 207 für I 1695, S. 25/29) und G. GRANDI (*Flores geometrici...*, Florenz 1728). Über den Gegenstand vgl. die Monographie von L. TENCA im *Ist. Lombardo Sc. Lett., Rendiconti, Cl. sc. mat. natur. 86*, 1953, S. 113/26. Auf die zahlreichen Erwähnungen in den Briefen der Zeitgenossen kann nur mehr streifend eingegangen werden. Ich verweise etwa auf die unter *Problème de Viviani* angeführten Stellen in *HO* X und auf *LMG* VII, S. 364/69. — Die *Med.* enthalten keine Aufzeichnungen JAKOBS über seine Lösung des *Florentiner* Problems.

[173] Diese Lösung stimmt im wesentlichen überein mit jener VIVIANIS [172]. Das wurde von HUYGENS in einer Aufzeichnung vom 27.X.1692 (*HO* X, S. 336/37) festgestellt und später auch von JAKOB erwiesen (*AE* X 1696 = *BKC*, S. 744). HUYGENS bemerkte ausserdem (a.a.O.S. 337/38), dass die BERNOULLIsche Kurve mit einer Ellipse bogengleich ist. Dies folgt für uns aus der Parameterform $x = a \sin\varphi$, $y = a\cos^2\varphi$, $z = a\cos\varphi\sin\varphi$; denn $ds^2 = a^2(1 + \cos^2\varphi)\,d\varphi^2 = (a\sin\varphi\, d\varphi)^2 + (a\sqrt{2}\cos\varphi\, d\varphi)^2$.

[174] Ausgangspunkt ist die Bemerkung JOHANNS (*AE* VI 1696 = *BJC* I, S. 160/61), das Oberflächenstück eines geraden Kreiskegels verhalte sich zu seiner Projektion auf den Grundkreis wie die Seitenlinie zum Grundkreisradius. Man könne auch das Oberflächenstück auf einer beliebigen Drehfläche kennzeichnen, und bei den Drehflächen 2. Ordnung sei das Problem besonders einfach. JAKOB teilt alsbald (*AE* X 1696 = *BKC*, S. 739/44) unter Bezugnahme auf diese Stelle mit, er habe folgendes gefunden: Ist die Meridiankurve $r = r(z)$ und im Meridianschnitt eine weitere Kurve $\rho = \rho(z)$ gegeben und werden auf dem Breitenkreis in der Höhe z (Halbmesser r) die Bögen σ

so vom Ausgangsmeridian aus abgegrenzt, dass $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{dz}{ds}$ (s = Bogenlänge auf dem Meridian), dann umgrenzen die Endpunkte P der Bögen σ eine Oberfläche, die gleich $\int \rho\, dz$ ist. Dieser Sachverhalt ergibt sich für uns sofort aus der Beziehung $O = \oint r d\varphi ds = \int \sigma ds = \int \rho dz$. Eine weitere Komplanation beruht auf dem nämlichen Grundgedanken. Ferner fügt JAKOB zur Meridiankurve $r = r(z)$ noch die Kurve $n = n(z)$ hinzu, wobei n die Kurvennormale ist und aus $\frac{dz}{ds} = \frac{r}{n}$ ermittelt werden kann. Dann bestimmt JAKOB die veränderliche Strecke $\bar{r}$ jeweils so, dass $\bar{r}^2 = 2 \int n dz$ ist. Die Projektion des auf dem Drehkörper abgegrenzten Oberflächenstücks wird von der Kurve $r = r(\varphi)$ umschlossen. Diese wird punktweise auf die Kurve $\bar{r} = \bar{r}(\varphi)$ bezogen. Dann ist

$$0 = \oint d\varphi \cdot r ds = \int d\varphi \cdot \int n dz = \frac{1}{2} \int \bar{r}^2 \cdot d\varphi \cdot$$

Also ist das Flächenstück innerhalb der Kurve $\bar{r} = \bar{r}(\varphi)$ ebensogross wie das Oberflächenstück auf dem Drehkörper senkrecht über dem von der Kurve $r = r(\varphi)$ umschlossenen Flächenstück. Auch hier folgt noch eine weitere Komplanation, die auf dem nämlichen Grundgedanken beruht.

JOHANN gibt später (*AE* III 1697 = *BJC* I, S. 174/75) ergänzende Sätze über Oberflächen und Rauminhalte von Körpern, die durch Drehen um drei sich schneidende Achsen entstehen, wenn die eine den Winkel zwischen den beiden andern halbiert.

175 *BKC*, S. 517/42. Die Vorarbeiten stehen in den *Med.*, Art. 144/88, 147/49/95 und 153/55/99.

176 *Prop.* 18: $\sum_1^\infty$; *prop.* 19: $\sum_1^n$; *prop.* 20: $\sum_n^\infty$.

177 Schon CRAMER hat in den zugehörigen Anmerkungen (*BKC*, S. 531/32) auf die Unzulässigkeit dieser Schlussweise hingewiesen. KOWALEWSKI[1] (S. 125/28) gibt eine moderne Analyse des Sachverhaltes.

178 JAKOB denkt hier an die logarithmische Spirale, von deren Bogenlänge bis zum unendlich oft umkreisten Pol schon in den *AE* VI 1691 (*BKC*, S. 443) die Rede war. Die Rektifikation der logarithmischen Spirale war schon DESCARTES bekannt[48]. Dass auch TORRICELLI zum nämlichen Ergebnis gekommen war (*Opere*, ed. G. LORIA-G. VASSURA. Faenza 1919, 3 Bde., zitiert als *TO*) und darüber seit 1645 in vertraulichen Briefen (*TO* III, S. 286, 361/62, 364, 391/92, 470, 477) und in der Übersicht über seine Studien aus der zweiten Hälfte 1645 (*TO* III, S. 21/24) berichtet und eine interessante Abhandlung von 1647 (*TO* I_2, S. 349/76) hinterlassen hatte, konnte JAKOB nicht wissen. Diese Abhandlung ist nunmehr in der von E. CARRUCCIO (Pisa 1955) besorgten revidierten Textfassung zugänglich.

179 In diesen Sätzen sehen wir Hinweise auf das bereits erwähnte MS. JAKOBS über Kurven 3. Ordnung[84].

180 Vermutlich bezieht sich JAKOB auf ähnlich lautende Sätze in HUYGENS, *Horologium oscillatorium* (Paris 1673, S. 90 = *HO* XVIII, S. 241). Dass sie erstmals von TORRICELLI (*TO* I_1, S. 191/221; *TO* I_2, S. 25, 233, 241 und öfter; *TO* III, S. 12, 372) und FERMAT (*Œuvres*, ed. P. TANNERY/Ch. HENRY, Paris 1891/1910, 4 Bde., zitiert als *FO*) in einer sehr frühen Abhandlung (*FO* I, S. 256/60, 266, bereits abgedruckt in den *Varia Opera*[82] von 1679) aufgestellt wurden, hat JAKOB wohl nicht gewusst.

181 Es handelt sich um die schon oben[141] erwähnte Angelegenheit. LEIBNIZ hatte die Bemerkungen JAKOBS nicht voll verstanden; deshalb legte dieser seinen Standpunkt in den *AE* VI 1693 (*BKC*, S. 559/61) nochmals eingehend dar. Zu diesem Thema äusserte sich LEIBNIZ in den *AE* VIII 1694 (*LMG* V, S. 309/10) überhaupt nicht, erklärte jedoch, schon lange bediene er sich bei der Bestimmung von Krümmungsradien ähnlicher Sätze wie des JAKOBschen *theorema aureum*[150]; im übrigen bestimme er den Krümmungsmittelpunkt (ξ, η) eines laufenden Kurvenpunktes (x, y) durch Differentiation der Normalengleichung $\xi = x + (\eta - y) y' = 0$ unter der Annahme, dass ξ und η fest bleiben. So findet er $\xi - x = -y'(1 + y'^2) : y''$, $\eta - y = (1 + y'^2) : y''$ usw. Bei dieser Gelegenheit betont er, man könne auch ohne (infinitesimale) Betrachtung an einer Hilfsfigur nur durch den Calculus selbst zum Ziel kommen. Das ist näher ausgeführt in Art. 157 der L'HOSPITALschen *Analyse*[138]. Erst in den *AE* VIII 1695 (*LMG* V, S. 328) gab LEIBNIZ unumwunden seinen Irrtum hinsichtlich der Wertigkeit der zusammenrückenden Punkte bei der Berührung zwischen Kurve und Krümmungs-

kreis zu. JAKOB erneuerte seinen Angriff in den *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 647) und in Note 8 (*BKC*, S. 684/85) der Ergänzungen zur *Geometria* [74] — damals wahrscheinlich noch nicht im Besitz des Augustheftes der *AE*. In den *AE* III 1696 (*LMG* V, S. 330) hat LEIBNIZ seinen Irrtum erneut eingestanden.

[182] Die Aufgabe befand sich in einem heute verschollenen Brief DEBEAUNES vom September 1638. Der Wortlaut ist erkennbar aus der Antwort von DESCARTES vom 20.II.1639 (Ausgabe von CLERSELIER [48], Bd. III, Nr. 71). Die Aufgabe wird auch erwähnt in einem Brief von DESCARTES an einen unbekannten Empfänger vom Juni 1645 (CLERSELIER, Bd. III, Nr. 79).

[183] DESCARTES hatte bereits folgendes festgestellt: Wird die Gerade $y = a + x$ mit der Parallelen durch den laufenden Kurvenpunkt P (x, y) zur x-Achse in Q und mit der Kurventangente durch P in R geschnitten, dann ist $QR = a\sqrt{2}$ (DESCARTES an DEBEAUNE [182], 20.II.1639). LEIBNIZ wusste bereits (Aufzeichnung vom Juli 1676, abgedruckt im *Briefwechsel mit Mathematikern*, ed. C. I. GERHARDT, Berlin 1899, S. 201/03), dass das Problem durch eine logarithmische Kurve gelöst wird. JOHANN trennt in der 11. Vorlesung über Integralrechnung (*BJC* III, S. 423/24) die Veränderlichen vermittels der Substitution $y = x + z$, erhält $dx = zdz : (a - z)$, konstruiert die Hyperbel $\xi = az : (a - z)$ und bestimmt ax als Flächeninhalt, indem er die Quadratur $\int_0^z \xi\, dz$ ausführt. Er weiss, dass $y = a + x$ die Kurvenasymptote ist, und findet ausserdem $\int_0^x y dx = x(a + y) - \frac{1}{2} y^2$. Das Ganze stellt er L'HOSPITAL zur Verfügung, der die Ergebnisse (vermehrt um die Schwerpunktskoordinaten der Fläche $\int_0^x y dx$ und mit Hinweisen auf die Rauminhalte der Körper, die durch Drehen dieser Fläche um die beiden Achsen bezw. um die abschliessende Ordinate entstehen) in Nr. 34 des *JS* vom 1.IX.1692 (*BJC* I, S. 62/63) unter seinem eigenen Signum G*** veröffentlicht. L'HOSPITAL, der für sich kaum mehr als die Textfassung in Anspruch nehmen konnte, stellte sich trotzdem HUYGENS gegenüber im Brief vom 10.IX.1692 (*HO* X, S. 312/13) als den Entdecker der Lösung hin und übermittelte sogar eine Abschrift des Aufsatzes mit einem Zusatz (Konstruktion der lösenden Kurve aus der logarithmischen) an HUYGENS (Brief vom 12.II.1693 = *HO* X, S. 391/93), die wenig später auch an LEIBNIZ ging (Brief vom 23.IV.1693 = *LMG* II, S. 234/36). Andererseits wusste JAKOB wohl schon seit dem Frühjahr 1692, dass sich JOHANN mit der DEBEAUNEschen Aufgabe befasst hatte. Das ist zu schliessen aus Art. 191 der *Med.* Hier stellt JAKOB zunächst fest, dass auch $y = x + a$ mit zu den Lösungen zählt. Auf die Differentialgleichung $dx = zdz : (a - z)$ wendet er die Substitution $a - z = t$ an und erhält (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens) $dx = adt : t - dt$. Daraus entnimmt er, dass die lösende Kurve nicht geometrisch sein kann.

LEIBNIZ nimmt L'HOSPITALS Aufsatz und einen Hinweis auf diesen (Brief von HUYGENS vom 12.I.1693 = *HO* X, S. 387) zum Anlass, um in den *AE* IV 1693 (*LMG* V, S. 287/88) eine Lösung durch Reihenentwicklung unter Hinweis auf die Darstellbarkeit durch Logarithmen zu geben. Kurz zuvor hatte er die Beziehung zur logarithmischen Kurve auch im Brief an HUYGENS angedeutet (Schreiben vom 30.III.1693 = *HO* X, S. 429). Dieser glaubte nunmehr irrtümlich, LEIBNIZ habe nur das von L'HOSPITAL Empfangene etwas umgeformt (Brief an L'HOSPITAL vom 9.IV.1693 = *HO* X, S. 437). JOHANN nimmt in den *AE* V 1693 (*BJC* I, S. 65/67) den Aufsatz im *JS* vom 1.IX.1692 (mit Recht) für sich in Anspruch. Auch er gibt eine Konstruktion vermittels der logarithmischen Kurve; sie ist eine Variante der L'HOSPITALschen. Bei dieser Gelegenheit bemerkt JOHANN, die Rektifikation der das DEBEAUNEsche Problem lösenden Kurve sei möglich, „jedoch nicht *in abstracto*, sondern nur unter Mitverwendung der logarithmischen Kurve oder einer gleichberechtigten". Von HUYGENS zur Rede gestellt (Brief an L'HOSPITAL vom 5.VIII.1693 = *HO* X, S. 476), musste L'HOSPITAL zugeben (Brief an HUYGENS vom 10.VIII.1693 = *HO* X, S. 484), er habe in Paris JOHANN das DEBEAUNEsche Problem vorgelegt. „Dieser habe ihm in sehr kurzer Zeit eine Lösung übermittelt, die sich kaum von seiner eigenen unterscheide." In den *AE* II 1696 (*BJC* I, S. 145/48) kommt JOHANN nochmals auf die Konstruktion vom V 1693 zurück und gibt eine eingehende Begründung.

[184] Erwähnt sei die Disputation vom 7.XII.1693 (Basel 1693 = *BJC* I, S. 77/91) über logische Sätze. Einige der beigefügten Thesen richten sich gegen weitverbreitete

Tagesmeinungen, so die achte: *Non datur saltus in rerum natura* gegen DESCARTES, die elfte gegen die Erklärung von Spiegelung und Brechung auf Grund des Prinzips vom kürzestdurchlaufenen Weg: LEIBNIZ (*AE* VI 1682 = *LD* III, S 145/50) ist zwar vielleicht gemeint, wird jedoch nicht genannt. In *Th.* 19 wird darauf hingewiesen, dass der Lichtweg (in geschichteter Atmosphäre) keine Gerade ist. Es handelt sich um die Ergebnisse der gemeinsamen Studien beider Brüder[164]. *Th.* 22 besagt — vielleicht im Anschluss an LEIBNIZens Note in Nr. 7 des *JS* vom 28.II.1678 (*LMG* VII, S. 119/20), dass jede Primzahl > 3 in der Form $6n \pm 1$ geschrieben werden kann. In *Th.* 23 wird festgestellt, dass die zusammengesetzten Zahlen der Form $6n \pm 1$ nur Teiler der nämlichen Form haben können.

[185] JAKOB berichtet im Brief vom 19.X.1695 an LEIBNIZ (*LMG* III, S. 21) von skorbutartigen Anfällen mit Gallenbeschwerden, die ihm das Arbeiten am Schreibtisch zur Qual machten und ihn für ein halbes Jahr ans Bett fesselten. JOHANN muss an L'HOSPITAL (wohl im verschollenen Brief vom 20.I.1693 = *BJS*, S. 164) einen sehr ungünstigen Bericht gegeben haben; denn dieser äussert sich in seiner Antwort vom 20.II.1693 (*BJS*, S. 165) recht besorgt und betont, welchen Verlust die Wissenschaft durch den allenfallsigen Tod JAKOBS erleiden müsste. JAKOBS Erkrankung wird auch im Brief JOHANNS an MENCKE vom 7.III.1693 (*BJS*, S. 390) erwähnt; zum Glück befinde sich der Patient jetzt wieder auf dem Wege der Besserung.

[186] Aus dem Brief L'HOSPITALS an JOHANN vom 2.I.1693 (*BJS*, S. 162) geht z.B. hervor, dass L'HOSPITAL eine Abschrift aus Art. 190[158] der *Med.* und die Konstruktion JAKOBS für die LEIBNIZsche Pseudologarithmica[164] $a\,\frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ vom Ende des Art. 202 (Zusatz zu Art. 180) erhalten hat. JAKOB war hier folgendermassen vorgegangen: er hatte die Beziehung $\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} = 0$ zur Überführung der LEIBNIZschen Differentialgleichung in die Form $a\,\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}$ verwendet und diese mittels $\frac{dy}{ds} = \frac{z}{a}$, also $\frac{dx}{ds} = \sqrt{a^2 - z^2} : a$, $ds = -a^2\,dz : z\sqrt{a^2 - z^2}$ reduziert. Daraus konnte er $dx = -a dz : z$ und $dy = -a dz : \sqrt{a^2 - z^2}$ entnehmen. Jetzt wird y als Bogen am Kreis $y^2 + z^2 = a^2$ gedeutet, dem die Strecke $z = a \,.\, \cos\frac{y}{a}$ zugeordnet ist. Andererseits ist $x = a \,.\, ln\,\frac{c}{z}$ aus einer logarithmischen Kurve konstruierbar, also auch die Kurve (x, y). Eine Variante dieser Konstruktion befindet sich im Nachlass, Stück 14 (*BKC*, S. 1064/65). L'HOSPITAL bestätigt die Konstruktion (*BJS*, S. 162/63), kann sich aber nicht denken, wie sie zustande gekommen ist. JOHANN gibt im verschollenen Brief an L'HOSPITAL vom 20.I.1693 (*BJS*, S. 164) die gewünschte Auskunft. Vielleicht bemerkte er hierbei, dass man ohne Umschweife sogleich mit dem Ansatz $\frac{dy}{ds} = \frac{z}{a}$ zu Erfolg kommt. L'HOSPITAL sieht (Brief an JOHANN vom 20.II.1693 = *BJS*, S. 165) in der Verwendung zweier Hilfskurven zur Konstruktion einer gesuchten etwas grundsätzlich Neues. — Ausserdem erhielt JOHANN Einblick in Art. 178[128] der *Med.* und liess die darin dargelegte Methode zur Bestimmung der Cosinus- und Sinus-Reihe an VARIGNON gehen (*BJS*, S. 167), der sie an L'HOSPITAL weitergab. Dieser vermerkte sehr richtig im Brief an JOHANN vom 25.IV.1693 (*BJS*, S. 167/68), das Bildungsgesetz der Koeffizienten sei von JAKOB durch Induktion *erschlossen*, nicht eigentlich *bewiesen*. — Weiterhin finden wir in den *Med.*, Art 200/01 Aufgaben über arithmetische und geometrische Reihen, die in Teil IV, Kap. V der *Ars conjectandi*, S. 228/30 verwendet werden, aber auch in frühe Aufzeichnungen JOHANNS übergegangen sind (*BJC* IV, S. 26/27). Eine davon wird auch in JOHANNS Brief an LEIBNIZ vom 18.VI.1695 (*LMG* III, S. 184/85) behandelt.

[187] Hier erscheint (*BKC*, S. 559) die erste Andeutung über ein neues Kunstmittel zur Behandlung von Krümmungsfragen[150a] (nämlich das hier noch nicht genannte *theorema aureum*), „das anscheinend uns Brüdern allein zugehört". Später (*BKC*, S. 562) wird allerdings festgestellt, JOHANN sei damals in Paris mit dem Velaria-Problem nicht ganz fertig geworden, obwohl auch er JAKOBS Mittel zur Bewältigung der Gleichung $a \cdot \frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3$ entdeckt habe. Das war die Antwort auf JOHANNS taktlose Bemerkung vom 28.IV.1692[118], die jedoch mit keinem Wort erwähnt wird. Schliesslich verweist JAKOB (*BKC*, S. 572) auf JOHANNS Lösung des *Florentiner* Problems[172] und auf dessen Behandlung des Problems der kürzesten Dämmerung, die veröffentlicht worden sei, ohne dass JAKOB davon etwas gewusst habe[63]. In diesem Aufsatz übt JAKOB des

öfteren ziemlich scharfe Kritik an LEIBNIZ, so in der Frage, wie der Krümmungskreis die Kurve trifft[181] (*BKC*, S.559/61), und bei Behandlung der LEIBNIZschen Pseudologarithmica[164, 186] (*BKC*, S. 570/71). Gegen Ende der Abhandlung schlägt er freundlichere Töne an und hebt LEIBNIZens grosse Verdienste in durchaus angemessenen Worten hervor (*BKC*, S. 572/73).

[188] Hier wäre die Preisaufgabe zu erwähnen, die JOHANN in Nr. 28 des *JS* vom 20.VII.1693 (*BJC* I, S. 66/67) stellt: Die graphische Konstruktion von Gleichungslösungen vermittels eines kleinen Stückes einer passenden Hilfskurve zu geben. JOHANN setzt sein Verfahren in Nr. 34 des *JS* vom 31.VIII.1693 (*BJC* I, S. 67/69) auseinander. In *Th.* 24 der logischen Disputation vom 7.XII.1693 (*BJC* I, S. 90) werden die in Nr. 36 des *JS* vom 14.IX.1693 (*BJC* I, S. 70/72) erhobenen Einwände eines Unbekannten als unzutreffend zurückgewiesen, und in Nr. 4 des *JS* vom 18.I.1694 (*BJC* I, S. 73/74) wird JAKOBS Aufsatz in den *AE* VI 1688[83] anerkennend genannt. Später hat JAKOB den Hauptinhalt der Note JOHANNS vom 31.VIII.1693 in die Ergänzungen zur *Geometria*[74], Note 18 übernommen (*BKC*, S. 694/96) und bei dieser Gelegenheit auch seinen Aufsatz in den *AE* IX 1689[99] erwähnt, nicht aber JOHANNS Beiträge. —Auch *Th.* 26 der logischen Disputation JOHANNS vom 7.XII.1693 (*BJC* I, S. 90), bezieht sich auf eine Behauptung JAKOBS aus den *AE* I 1691[155], der freilich an dieser Stelle nicht erwähnt wird, nämlich auf die vorgebliche Unmöglichkeit, das durch eine in sich zurücklaufende algebraische Kurve begrenzte Flächenstück algebraisch zu quadrieren und seine Berandung algebraisch zu rektifizieren[156]. JOHANN äussert sich so: Allein aus der Tatsache, dass die Spiralen keine algebraischen Kurven sind, weil sie von einer Geraden in unendlich vielen Punkten geschnitten werden, folgt verbindlich, dass die Quadratur und Rektifikation von Kreisen und anderen in sich zurücklaufenden Kurven und den von ihnen umschlossenen Flächen algebraisch unmöglich ist.

[189] Vgl. hierzu *BJS*, S. 182, Anmerkung 2.

[190] Niemand ahnte damals, dass dieses Problem schon ein Menschenalter früher von J. GREGORY gelöst worden war. Unter Bezugnahme auf die einschlägigen Stellen im J. GREGORY-*Tercentenary memorial volume*, ed. H. W. TURNBULL, London 1939 (zitiert als *GT*) erwähne ich zunächst GREGORYS Brief an COLLINS vom 15.IX.1670 (*GT*, S. 102), wo gesagt wird, das Problem hänge von der Hyperbelquadratur ab. In der Sendung an COLLINS vom 29.XII.1670 (*GT*, S. 148/50) wird die Logarithmica als Kurve konstanter Subtangente aus $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{x}$ erklärt. Das Bogenintegral $s = \int_a^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}\, dx$ geht vermöge der Substitution $b\sqrt{\ldots} = t + b^2 : x$ über in $b \cdot \ln \frac{x}{a} + \frac{1}{b} \int_a^x t dx$. Nach partieller Integration und unter Verwendung der Hilfsgrösse $c = \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{a^2}} - \frac{b^2}{a}$ findet GREGORY einen sehr geschickt unter Mitverwendung der Ausgangskurve geometrisch gedeuteten Ausdruck, der auf die Darstellung in der Form

$$bs = tx - ac - 2\,b^2 \ln\left(\sqrt{b^2 - c^2} : \sqrt{b^2 - t^2}\right) + b^2 \ln \frac{x}{a}$$

hinausläuft. Dazu tritt (nach Abspalten eines Logarithmus) die Entwicklung nach Potenzen von x vermöge $s = b \cdot \ln \frac{x}{a} + \int_a^x \frac{b}{x} \left\{\sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}} - 1\right\} dx$. Hierbei wird die Wurzel nach dem binomischen Satz entwickelt und dann gliedweise integriert. Schliesslich folgt im Brief an COLLINS vom 27.V.1671 (*GT*, S. 190) die Entwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ aus dem Ansatz $s = x + \int_a^x \left\{\sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}} - 1\right\} dx$.

[191] L'HOSPITAL teit zunächst im Brief an HUYGENS vom 26.VII.1692 (*HO* X, S. 305) das Ergebnis mit, verbessert im Brief vom 10.IX.1692 (*HO* X, S. 312) ein Schreibversehen des Kopisten und führt eine Verifikation durch, die sein Vorgehen genau erkennen lässt. Auch er geht von der Darstellung der Logarithmica aus der kennzeichnenden Differentialgleichung aus. Dann formt er um:

$$s = \int_a^x \frac{x^2 + b^2}{x\sqrt{x^2 + b^2}}\, dx = \sqrt{b^2 + x^2} + b^2 \int_a^x \frac{dx}{x\sqrt{b^2 + x^2}}.$$

Im verbleibenden Integral substituiert er zuerst $x = b^2 : u$. Das Ergebnis $b \int\limits_{b^2:a}^{u} \frac{du}{\sqrt{b^2 + u^2}}$ ist — das wusste er aus der zweiten Vorlesung JOHANNS über Integralrechnung (*BJC* III, S. 396) — proportional zur Sektorfläche an der gleichseitigen Hyperbel $v^2 = b^2 + u^2$. Jetzt macht er vermöge $\xi = (u + v) : \sqrt{2}$, $\eta = (-u + v) : \sqrt{2}$ die Hyperbelasymptoten zu den Koordinatenachsen und erhält das verbleibende Integral in der Form $b \ln \left(\xi : \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Am Schluss verwendet er die aus

$$\xi = \frac{u + \sqrt{b^2 + u^2}}{\sqrt{2}} = \frac{b^2\sqrt{2} + b\sqrt{2(b^2 + x^2)}}{2x} \text{ bzw. } 2\xi^2 x = b^2 x + 2b^2\xi\sqrt{2}$$

bestimmte Hilfskurve. Im Brief an HUYGENS vom 23.XI.1692 (*HO* X, S. 342/44) führt L'HOSPITAL eine Variante dieses Verfahrens vor. Mit einem Schlag rationalisiert er die Wurzel vermöge $\sqrt{b^2 + x^2} = \frac{tx}{b} - b$. Daraus erhält er die einfachere Hilfsgleichung $t^2 x = b^2 x + 2b^2 t$ und nunmehr unmittelbar $\frac{b^2\,dx}{x\sqrt{b^2 + x^2}} = -b\frac{dt}{t}$. Ohne die Herleitung findet sich diese Form des Ergebnisses samt der zugehörigen Hilfsgleichung auch im Brief an LEIBNIZ vom 14.XII.1692 (*LMG* II, S. 216/17). HUYGENS berichtet über L'HOSPITALS Entdeckung, die er für richtungsweisend ansah, in der *HOS* II 1693 (*HO* X, S. 407/08). Er bemerkt, dass gleichzeitig die Quadratur der Kurve $x^2 y^2 (b^2 + x^2) = b^6$ geleistet ist; man könne jedoch auch mit der einfacheren Hilfskurve $x^2 y^2 = b^2 (b^2 + x^2)$ auskommen. — Später hat JAKOB die Ausstreckung der logarithmischen Kurve in geschlossener Form und durch Reihenentwicklung in *prop.* 52 der 4. Reihendissertation vom 26.XII.1698 (*BKC*, S. 863/64) übernommen. Erstaunlicherweise hat keiner der damaligen Bearbeiter bemerkt, dass das Bogenintegral am einfachsten vermittels der Substitution $b^2 + x^2 = y^2$ behandelt werden kann.

192 *HO* X, S. 408/13 [121]. LEIBNIZ gibt seine eigene Lösung in den *AE* IX 1693 (*LMG* V, S. 296/97). Dort berichtet er, er sei bereits in Paris von Cl. PERRAULT, der es nicht zu meistern wusste, auf das Traktrixproblem hingewiesen worden und habe es schon damals gelöst.

193 *BJC* I, S. 66. Aus dem Brief JOHANNS an L'HOSPITAL vom 22.IV.1694 (*BJS*, S. 208/11) geht hervor, dass JOHANN OT als x, PT als $px : q$ und die Projektion von PT auf die Abszissenachse als y eingeführt hat. Er transformiert die entstehende Differentialgleichung $(p^2 x + q^2 y)\, y dx = p^2 x^2 (dx + dy)$ vermittels $ay = tx$ in $\frac{dx}{x} = \frac{ap^2\,dt}{a^2 t^2 - a^2 p^2}$. setzt dann $t = \frac{ap}{q} \cdot \frac{q^2 z^2 + a^2 p^2}{q^2 z^2 - a^2 p^2}$ und erhält schliesslich $\frac{dx}{x} = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dz}{z}$. Erst viel später (um 1740) hat JOHANN auf einem beigelegten Zettel die Integration nicht durch die Transformation $t \longrightarrow z$, sondern durch Partialbruchzerlegung erledigt und einen begangenen Fehler berichtigt (*BJS*, S. 212/14).

194 *BKC*, S. 574/76 enthält nur die Lösung und eine interessante mechanische Fadenkonstruktion. Aus Art. 203 (Nachlass, Stück 19 = *BKC*, S. 1082/84) der *Med.* geht JAKOBS Ansatz hervor: PT wird als x, OT als nx, die Projektion von PT auf die Abszissenachse als y bezeichnet. Jetzt ist $\frac{d\sqrt{x^2 - y^2}}{d(nx + y)} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{y}$, also $\frac{x\,dx - y\,dy}{x^2 - y^2} = \frac{n\,dx + dy}{y}$. Mit $y = xz$ ergibt sich $\frac{dz}{z^2 - 1} = n\frac{dx}{x}$, folglich $y = x \cdot \frac{c^{2n} - x^{2n}}{c^{2n} + x^{2n}}$. JAKOB nimmt allerdings für c nur den Wert 1 an. Eine andere Art der Lösung gibt L'HOSPITAL im Brief an JOHANN vom 27.VI.1693 (*BJS*, S. 174/77). Sie erscheint nach einigem Hin und Her (hierzu vgl. *BJS*, S. 174, Anm. 4) in der von JOHANN besorgten lateinischen Übersetzung in den *AE* IX 1693 (S. 398/99). L'HOSPITAL beginnt — erkennbar aus dem Brief an HUYGENS vom 18.IX.1693 (*HO* X, S. 518/23) — mit der Differentialgleichung $\frac{y\,ds}{x\,dy - y\,dx} = \frac{p}{q}$, setzt dann $x = uy$, erhält $q\frac{dy}{y} = \frac{(p^2 + q^2)\,dx}{qu + \sqrt{p^2 u^2 + p^2 q^2}}$ und kommt durch den Ansatz $\sqrt{p^2 u^2 + p^2 q^2} = v - pu$ zu einem durch Logarithmen integrierbaren Ausdruck in v. Sein Ergebnis erscheint in etwas erweiterter Form auch in den *Mémoires de mathématique et de physique* [= *MMP*] vom 30.VI.1693, S. 97/101 (erschienen Ende 1693) mit lateinischem Nachdruck in den *AE* V 1694, S. 193/96. In den *AE* X 1693 (*HO* X, S. 512/14) berichtet HUYGENS ohne Rechnung über seine Bestätigung für JAKOBS Lösung. Er spricht ausdrücklich von einer Differentialgleichung, rühmt

LEIBNIZ als den Entdecker der Differentialrechnung und stellt eine kurze instrumentale Lösung in Aussicht. Im Brief an L'HOSPITAL vom 1.X.1693 (*HO* X, S. 536/37) erwähnt HUYGENS zum erstenmal die von ihm kurz zuvor (*HO* X, S. 555) aufgefundene Bedingung für das Auftreten einer Spitze $\left(\frac{y}{x} = n > 1\right)$, deren Tangente auf dem Fahrstrahl durch den Ursprung senkrecht steht (zuerst mitgeteilt in den *AE* IX 1694 = *HO* X, S. 673/74). Die Einwände des Abbé CATELAN gegen L'HOSPITALS Lösung (Nr. 13 des *JS* vom 29.III.1694, lateinisch in den *AE* V 1694), ihre Widerlegung durch L'HOSPITAL (*AE* X 1694) und das Eintreten LEIBNIZens für JAKOB und L'HOSPITAL (*AE* VII 1694 = *LMG* V, S. 306) sowie L'HOSPITALS Darstellung in der *Analyse*[138], Art. 74 seien nur mehr am Rande erwähnt. Auch die einschlägigen Bemerkungen LEIBNIZens (*AE* VII 1693 = *LMG* V, S. 288; *AE* VII 1694 = *LMG* V, S. 306 und Nr. 34 des *JS* vom 23.VIII. 1694 = *LMG* V, S. 306/08) über die Behandlung von Differentialgleichungen, die sich als Funktionen aus Stücken am charakteristischen Dreieck ergeben, können nur mehr gestreift werden.

[195] *Med.*, Art. 204. JAKOB setzt zunächst $ay = xz$, erhält $\frac{dx}{x} = \frac{a^2\,dz}{bz^2 - a^2 z + a^2 c}$ und beseitigt alsdann das lineare Glied im Nenner vermöge der Transformation $z = t + a^2 : 2b$. Wahrscheinlich stammt das Problem von JOHANN, der eine Lösung am 20.I.1693 (*BJS*, S. 164) an L'HOSPITAL gehen liess. Dieser äusserte sich in der Antwort vom 20.II.1693 (*BJS*, S. 165) anerkennend über das für ihn neue Verfahren JOHANNS, das wir heute nicht mehr sicher identifizieren können.

[196] Es handelt sich um *Th.* 27 der Dissertation (*BJC* I, S. 91). JAKOBS Aufzeichnungen finden sich in den *Med.*, Art. 209/11.

[197] JAKOB wusste wohl nicht, dass derartige Fragen schon längst in J. COLLINS, *Doctrine of decimal arithmetic, simple interest, etc.*, London 1664, [2]1674 behandelt worden waren. — Am Ende der Aufzeichnung bemerkt JAKOB, es handle sich um das nämliche Problem wie in *These* 9 der *Epimetra* zur 2. Reihendissertation vom 28.XI.1692 (*BKC*, S. 541), wo gefragt wird, nach wieviel Zügen einer Luftpumpe im Rezipienten ein vorgeschriebener Grad von Luftverdünnung auftritt. Später erscheint die Aufgabe als letzte These der *Epimetra* zur 3. Reihendissertation vom 24.XI.1696 (*BKC*, S. 766).

[198] L'HOSPITALS Entdeckung ist in einer Note vom 30.XI.1693 in den *MMP*, S. 145/47 enthalten, die vermutlich Ende Mai 1694 zum Druck kamen. Sie richtet sich gegen die Behauptung JAKOBS in den *AE* III 1692 (*BKC*, S. 481), im Wendepunkt müsse der Krümmungshalbmesser unendlich sein, der auch LEIBNIZ in den *AE* IX 1692 (*LMG* V, S. 282) beigetreten war. Sie wird auch in Note 22 (*BKC*, S. 697/98) der Ergänzungen JAKOBS zur *Geometria*[74] von 1695 wiederholt. Anscheinend war JAKOB von JOHANN über L'HOSPITALS Entdeckung verspätet unterrichtet worden.

Die ersten Erwähnungen des richtigen Sachverhaltes finden sich in den Briefen L'HOSPITALS an HUYGENS vom 22.III.1694 (*HO* X, S. 585/86) und an JOHANN vom 7.IV.1694 (*BJS*, S. 203/04). Beidemale nennt L'HOSPITAL als Gegenbeispiel das Verhalten der Kurve $a^2 x^3 = y^5$ im Ursprung. An LEIBNIZ geht im Brief vom 30.XI.1694 (*LMG* II, S. 253) nur ein kurzer Hinweis ohne das Beispiel. Es scheint, dass JOHANN schon dem Brief an MENCKE vom 22.IV.1694 (*BJS*, S. 392/93) einen Zettel an LEIBNIZ beigelegt hatte, worin L'HOSPITALS Entdeckung erwähnt wird (vgl. JOHANNS Brief an L'HOSPITAL vom 22.IV.1694 = *BJS*, S. 206). Auf den Sachverhalt wird ausserdem auch in L'HOSPITALS *Analyse*[138], Art. 82 verwiesen, die in der später hinzugefügten Überschrift zu den *Med.*, Art. 218 erwähnt wird.

[199] Vgl. JOHANNS Brief an L'HOSPITAL vom 22.IV.1694 (*BJS*, S. 206).

[200] Dies ist, soweit ich sehe, das erste Beispiel für die Auflösung einer höheren Kurvensingularität. — Art. 218 der *Med.* ist mit nur geringfügigen sprachlichen Veränderungen in *AE* IX 1697 (*BKC*, S. 779/82) übergegangen, wo ausdrücklich auf L'HOSPITALS Note vom 30.XI.1693[198] Bezug genommen wird.

[201] *BKC*, S. 576/600. Vgl. Anm. 139, 150, 167/71.

[202] *BKC*, S. 579/80. Indem JAKOB $x = a\varphi$, $y = r$ setzt und das Bogenelement der Kurve mit ds bezeichnet, erhält er einen Ausdruck für ρ, der mit $a\,\frac{dy}{ds} : \left(2\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + y\,\frac{d^2x}{dy^2}\right)$ gleichwertig ist und in verschiedenen Varianten auftritt.

[203] In den *AE* X 1694 (*BJC* I, S. 119) stellt JOHANN die Sätze JAKOBS über den Krümmungshalbmesser in Polarkoordinaten als wenig belangreich und sehr einfach beweisbar hin. Ein Beweis steht im Brief an L'HOSPITAL vom 12.I.1695 (*BJS*, S. 256), mitverwendet in den Artikeln 64, 66, 79 und 81 der *Analyse*[138]. An späterer Stelle des Aufsatzes vom Oktober 1694 (*BJC* I, S. 121) versucht sich JOHANN mit der Gegen-

bemerkung zu revanchieren, dem Bruder sei die Darstellung von Integralen wie $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x - x^3}}$ oder $\int \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ durch Rektifikation noch nicht bekannt. Sein Hinweis war jedoch ein Schlag ins Wasser; denn schon in den *AE* IX 1694 (*BKC*, S. 611) hatte JAKOB des Bruders Andeutung vorweggenommen, der diesen Aufsatz noch nicht kannte. Nachmals behauptete JOHANN im Brief an LEIBNIZ vom 17.IV.1696 (*LMG* III, S. 268/72), in dem er sich voller Bitterkeit über JAKOB äussert, dieser habe die Konstruktion mit der Lemniskate erst nach JOHANN gefunden, aber seine Arbeit sei früher zum Druck gekommen. Vgl. Anm. 223.

204 An der etwas ruhmredigen Ausdrucksweise JAKOBS (vgl. *BJS*, S. 251, Anm. 9) nahm auch L'HOSPITAL Anstoss: Siehe den Brief an JOHANN vom 31.XII.1694 (*BJS*, S. 251/52), wo zwei der von JAKOB beweislos mitgeteilten Formeln durch eine direkte geometrische Betrachtung erwiesen werden. L'HOSPITAL bemerkt, auf die eine dieser Formeln sei er durch JAKOBS Abhandlung in den *AE* VI 1693 [149] über die diakaustischen Kurven verfallen und habe sie schon am 2.IX.1693 an JOHANN gegeben, dazu eine Variante der Formel $1 : \rho = \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}$ (*BJS*, S. 185/87). Auch im Brief an LEIBNIZ vom 2.III.1695 (*LMG* II, S. 271) nimmt L'HOSPITAL die Sätze JAKOBS für sich in Anspruch unter Verweis auf seinen Aufsatz vom 31.VIII.1693 (*MMP*, S. 129/33, etwa im Frühjahr 1694 gedruckt). JOHANN bestätigt L'HOSPITALS Anspruch im Brief an LEIBNIZ vom 12.II.1695 (*LMG* II, S. 163). Er beklagt sich in scharfen Worten über die Geheimnistuerei und das Geltungsbedürfnis JAKOBS, vor allem über die Art, wie dieser JOHANN um dessen Erfolge willen beneidet. Vergeblich versucht LEIBNIZ im Brief vom 10.III.1695 (*LMG* III, S. 165/66) JOHANN zum Einlenken und zu besserer Würdigung der Verdienste des Bruders zu bewegen. Im Brief vom 30.IV.1695 (*LMG* III, S. 173) stehen weitere abschätzige Bemerkungen über JAKOB. Nur ungern bestellt JOHANN die ihm regelmässig für den Bruder aufgetragenen Grüsse und bringt immer wieder Nachteiliges vor, vor allem im Brief an LEIBNIZ vom 17.IV.1696 (*LMG* III, S. 268/72).

205 *BKC*, S. 586/89. Die Spannungskurve $t = c\left(\frac{x}{a}\right)^p$ wird als höhere Parabel angenommen. In den *Med.* findet sich für diese Betrachtung keine Vorlage.

206 *BKC*, S. 591/92. JAKOB beginnt mit der Kennzeichnung einer Kurve aus $\frac{dy}{dx} = \frac{t(x)}{a}$. Er sagt, wenn man eine algebraische Kurve $\Phi(x, u) = 0$ angeben könne, deren Subtangente $u : \frac{du}{dx} = \frac{a^2}{t}$ sei, dann ergebe sich y aus dem Logarithmus von u $\left(\text{nämlich als } a \cdot ln\frac{u}{c}\right)$. Lasse sich keine derartige algebraische Hilfskurve ermitteln, dann genüge der ausschliessliche Ansatz mit Logarithmen nicht mehr. Gegen die missverständliche sprachliche Fassung erhob LEIBNIZ im Brief an HUYGENS vom 27.VII.1694 (*HO* X, S. 661) und in den *AE* VIII 1694 (*LMG* V, S. 313) Einspruch, jedoch konnte sich JAKOB durch zweckmässige Auslegung seines Textes in den *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 646/47) salvieren. Andererseits hatte JAKOB angedeutet, unter den transzendenten Kurven liesse sich nur die logarithmische punktweise konstruieren. Auch dagegen wandte sich LEIBNIZ in den *AE* VIII 1694 (*LMG* V, S. 311/12), indem er auf die punktweise Konstruierbarkeit der Sinuslinie $y = a \sin \frac{x}{a}$ durch fortgesetztes Halbieren von Winkeln und Strecken hinweist, sobald der Viertelkreisbogen konstruiert vorliegt.

207 *BKC*, S. 592, vgl. Anm. 218. JOHANN übt an dieser Stelle in den *AE* X 1694 (*BJC* I, S. 122) eine nicht ganz zutreffende Kritik, wenn er sagt, dass das Integral nur zum Teil von der Rektifikation der Ellipse (in der Form $\int \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}} dx$) abhängt. — Schon bei der Rektifikation der parabolischen Spirale in den *AE* I 1691 [112] war JAKOB auf das elliptische Integral $\int_0^a dy \sqrt{1 + 4y^2 (a - y)^2 : a^2 p^2}$ gestossen, hatte jedoch damals nur die durch $\int_0^y \cdots$ und $\int_{a-y}^a \cdots$ gekennzeichnete Bogengleichheit zwischen je zwei einander zugeordneten Bogenstücken gefunden. Das hatte ihm ein schönes Lob von LEIBNIZ (*AE* IX 1691 = *LMG* V, S. 256) eingetragen.

208 *BKC*, S. 601/07. — LEIBNIZ hatte das Problem in den *AE* IV 1689 (*LMG* V, S. 237) gestellt [102] und in den *AE* V 1690 (*LMG* VI, S. 194) und VII 1690 (*LD* III, S. 239) wiederholt. Lange wagte sich niemand an die Lösung.

209 Ist nämlich der Ursprung O jener Punkt, dem der laufende Kurvenpunkt (x, y) mit konstanter (positiver oder negativer) Geschwindigkeit c zustrebt, dann ist $x^2 + y^2 = c^2 t^2$. Weil die Bewegung im Schwerefeld der Erde vor sich geht, gilt weiterhin $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(a + y)$ mit der Anfangsbedingung $c^2 = 2ga$. Daraus ergibt sich die erwähnte Differentialgleichung durch Entfernen von c und g. Ersichtlich hat sie L'HOSPITAL durch JOHANN kennengelernt. Er brachte sie vermittels des Ansatzes $y = z^2 : a$ auf die Form $a^2 (x + z)\, dx = 2 (a^2 x - z^3)\, dz$. Da er nun nicht mehr weiterkam, wandte er sich am 14.XII.1692 (*LMG* II, S. 217) an LEIBNIZ. Dieser schlug in seiner Antwort vom Januar 1693 (*LMG* II, S. 220/22) eine Lösung durch Reihenentwicklung vor. L'HOSPITAL entgegnete am 24.II.1693 (*LMG*, S. 224), es handle sich um eine spezielle Lösung der *isochrona paracentrica*, jedoch ging LEIBNIZ auf diese Bemerkung nicht ein. Irgendetwas über diese Korrespondenz muss an JAKOB gegangen sein, vielleicht in den verlorenen Briefen des Jahres 1692 von L'HOSPITAL an JAKOB (vgl. *BKC*, S. 660). Daraus erklärt sich wohl die Unterstellung JAKOBS in den *AE* VI 1694 (*BKC*, S. 601), auch LEIBNIZ sei mit der Aufgabe nicht fertig geworden. In Wirklichkeit hatte dieser den Zettel mit der Auflösung verlegt (Brief an HUYGENS vom 11.XII.1693 = *HO* X, S. 574/75 bezw. an L'HOSPITAL vom 6.I.1695 = *LMG* II, S. 257) und erst später wiedergefunden.

210 Dieser Ansatz heisst $x^2 + y^2 = r^2$, $ay = rz$. Er führt auf $\frac{dr}{\sqrt{ar}} = \frac{a\,dz}{\sqrt{az(a^2 - z^2)}}$.

211 Vermittels $az = u^2$ folgt nämlich $\sqrt{ar} = \int \frac{a^2\,du}{\sqrt{a^4 - u^4}}$.

212 Erst HUYGENS bemerkte im Brief an LEIBNIZ vom 24.VIII.1694 (*HO* X, S. 667/68, auch übergegangen in den von LEIBNIZ veranlassten Auszug in den *AE* IX 1694 = *HO* X, S. 671/72), dass es auch lösende Kurven geben könne, die sich dem Ursprung in unendlich vielen Windungen annähern.

213 Dass sich JAKOB nicht hinreichend von dem jüngeren Bruder anerkannt fühlte, geht sehr deutlich aus dem bei SPIESS [77], S. 27 in deutscher Übersetzung wiedergegebenen Hochzeitsgedicht vom März 1693 hervor.

214 *Med.*, Art. 219 (Nachlass, Stück 2 = *BKC*, S. 999/1006). Ein Auszug ging am 14.III.1696 (*LMG* III, S. 42/44) als Beitrag JAKOBS zur beabsichtigten *scientia infiniti* an LEIBNIZ.

215 Vom griechischen λημνίσκος, wollenes Band.

216 *BKC*, S. 608/12.

217 Dies ergibt sich mittels der aus $x^2 + y^2 = t^2$, $x^2 - y^2 = a^2$ folgenden Parameterform für die gleichseitige Hyperbel.

218 Unter Mitverwendung der Ellipse $2x^2 + y^2 = 2a^2$ folgt das so: Das Bogendifferential der Ellipse ist $\frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}\, dx$, das der Elastica $\frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, also ihre Differenz $\frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

219 Brief an LEIBNIZ vom 24.VIII.1694 (*HO* X, S. 664/67), in einem von LEIBNIZ besorgten lateinischen Auszug nebst dessen zusätzlichen Bemerkungen abgedruckt in den *AE* IX 1694 (*HO* X, S. 671/72).

220 *LMG* V, S. 309/18.

221 Die ersten Versuche LEIBNIZens in dieser Richtung gehen zurück bis auf den August 1673. Vgl. hierzu D. MAHNKE, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*, Abh. d. preuss. Ak. d. Wiss. Jhg. 1925, phys.-math. Kl. Nr. 1, Berlin 1926, S. 52/53 und 55/56 bezw. J. E. HOFMANN/H. WIELEITNER [151], S. 587/88.

222 *BJC* I, S. 119/22.

223 JOHANN verwendet die durch einen Kunstgriff gewonnene Zerlegung

$$d\sigma^2 = \frac{a^3\, dt^2}{2t(a^2 - t^2)} = \frac{(a + 2t)^2\, dt^2}{4t(a + t)} + \frac{(a - 2t)^2\, dt^2}{4t(a - t)} \equiv d\xi^2 + d\eta^2.$$

Daraus folgt $\xi^2 = at + t^2$, $\eta^2 = at - t^2$. Daran schliesst sich eine sehr elegante Konstruktion der Elastica vermittels der Lemniskate. Im Brief an L'HOSPITAL vom 3.V.1695 (*BJS*, S. 287) schreibt JOHANN, er habe seine Lösung vor JAKOB gefunden, und unterstellt, der Bruder habe eine Andeutung erhalten und sei dem Entdecker durch eilige Sendung nach Leipzig zuvorgekommen. Vgl. Anm. 203.

[224] *BKC*, S. 639/63. Vgl. die Anmerkungen 119, 159, 165/67, 181, 206.

[225] *BKC*, S. 641. JAKOB denkt sich die Bogenlänge s einer Kurve geradegestreckt und als Abszisse aufgefasst. Wird die zugehörige Strecke $a^2 : \rho$ als Ordinate aufgetragen, dann „hängt $\int_0^s \frac{a^2}{\rho} \cdot ds = a^2\tau$ von der Kreisquadratur ab". Der Satz ist näher ausgeführt in den *Med.*, Art. 249 (gekürzt im Nachlass, Stück 10 = *BKC*, S. 1033/36). Dort wird ausserdem die Behandlung von Differentialgleichungen 2. Ordnung vermittels passender Beziehungen zwischen den 2. Ableitungen der Koordinaten x, y und der Bogenlänge s gelehrt und auf die Velaria, die Elastica und die Lintearia angewendet. Der Satz ist wahrscheinlich die Antwort JAKOBS auf die Entdeckung JOHANNS in den *AE* VIII 1695 (*BJC* I, S. 142/44), wonach die Endpunkte A und B einer starren Strecke c, die auf einem (wendepunktfreien) Bogen rollt und dabei um den Winkel τ gedreht wird, zwei sich zu $c\tau$ ergänzende Bögen beschreiben. JOHANNS Beweis ging am 23.VI.1695 (*BJS*, S. 295) an L'HOSPITAL und wurde von diesem in Art. 166 der *Analyse*[138] aufgenommen. — In den *Med.*, Art. 221 hat sich JAKOB einen Beweis für JOHANNS Satz zurechtgelegt, der auf einer direkten infinitesimalgeometrischen Betrachtung beruht und von dem JOHANNS kaum abweicht. In *BKC*, S. 644 deutet er an, dass er auf das Problem unabhängig von JOHANN gekommen ist. Woher die Anregung stammt, ist bisher noch nicht klar. LEIBNIZ bildet JOHANNS Ergebnis weiter, indem er die Fläche ausrechnet, die bei Abwicklung des Fadens längs einer Kurve von einem bestimmten Fadenstück überstrichen wird (*AE* XI 1695 = *LMG* VII, S. 337/39).

[226] *BKC*, S. 656/58. Diese Studien sind angeregt durch die Mitteilungen LEIBNIZENS in Nr. 35 des *JS* vom 7.IX.1693[169] (*LMG* VI, S. 231/33) über die Zusammensetzung von Kräften und Bewegungen nach dem Parallelogrammgesetz. Sie umfassen die Artikel 222/27 der *Med.* nebst einem vor Artikel 230 beigefügten Zusatz.

[227] *Med.*, Art. 230 setzt die früheren Studien fort. Art. 232 enthält die Behandlung der Kurve mittlerer Richtungen nebst einigen Beispielen.

[228] *BKC*, S. 618/23.

[229] Vorstudie: *Med.*, Art. 197 vom Winter 1692/93. In den *AE* wendet JAKOB sein Ergebnis sogleich mit grossem Geschick an auf die bereits von JOHANN in den *AE* I 1692 (*BJC* I, S. 57/58) geleistete Bestimmung der Astroide. Der Gegenstand wird auch in Art. 148 der L'HOSPITALschen *Analyse*[138] behandelt, die Astroide dortselbst am Ende von Art 158 erwähnt.

[230] Vgl. *Med.*, Art. 166[134]. Der Gegenstand wird nochmals in Note 7 (*BKC* S. 682/84) der Ergänzungen zur *Geometria*[74] behandelt. Auch L'HOSPITAL wusste über JOHANN von der Hüllkurve der Wurfparabeln. Er erwähnt das Problem im Brief an LEIBNIZ vom 24.II.1693 (*LMG* II, S. 226) und übernimmt diesen Hinweis in die *Analyse*[138], Ende von Art. 147.

[231] Es handelt sich um die Kurvenschar $y^{p+q} = t^p (x - t)^q$ mit t als Parameter. Der einfachste Fall $p = 1$, $q = 1$ wird ziemlich ausführlich in Note 7 (*BKC*, S. 681/82) der Ergänzungen zur *Geometria*[74] dargelegt. Der allgemeine Fall erscheint in L'HOSPITALS *Analyse*[138], Art. 209. In den Ergänzungen zur *Geometria* findet sich ausserdem (*BKC*, S. 683) ein Hinweis auf die Einhüllende jener Schar von Parabeln mit parallelen Achsen durch einen festen Punkt, deren Scheitel auf einer gegebenen Kurve wandert. Diese Frage wird auch im Brief L'HOSPITALS an JOHANN vom 8.XII.1692 (*BJS*, S. 160), in der verschollenen Antwort JOHANNS vom 18.XII.1692 (*BJS*, S. 161) und in L'HOSPITALS Entgegnung vom 2.I.1693 (*BJS*, S. 161/62) berührt. Im Brief an LEIBNIZ vom 24.II.1693 (*LMG* II, S. 225/26) führt L'HOSPITAL das von JOHANN Erhaltene ohne Nennung des Mentors vor und übernimmt es in die *Analyse*, Art. 146/47.

[232] *BKC*, S. 621/22. JAKOB denkt an die unter Anwendung des *theorema aureum* (Haupttext bei Anm. 168) durchführbare Trennung der Veränderlichen.

[233] *BKC*, S. 623. Die Aufgabe lautet: Gegeben sind die algebraischen Kurven $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$. Die Tangente in P auf $\mathfrak{T}$ schneide $\mathfrak{U}$ in U und $\mathfrak{V}$ in V. Die Tangenten an $\mathfrak{U}$ in U und $\mathfrak{V}$ in V schneiden sich in Π. Die Tangente an die von Π bestimmte Kurve in Π ist zu bestimmen. JOHANN, der die Aufgabe als armselig *(chetif)* bezeichnet (Brief an L'HOSPITAL vom 21.II.1695 = *BJS*, S. 264), gibt die Lösung in den *AE* II 1695 (*BJC* I, S. 138) in sieben Zeilen, L'HOSPITAL eine Lösung und Verallgemeinerung in den *AE* VII 1695, S. 307/09.

[234] Das Problem fordert, jene Kurve für ein Laufgewicht anzugeben, das in jeder Stellung eine Zugbrücke im Gleichgewicht hält, wenn die Zugbrücke durch das Laufgewicht von einer Kette gehalten wird, die über eine feste Rolle läuft. Rein statisch behandelt, führt es auf die Kurvengleichung in Polarkoordinaten $r = a + b \cos \varphi$

235 Über das Intrigenspiel, das JOHANN in dieser Angelegenheit angerichtet hatte, vgl. *BJS*, S. 145/47.

236 *BJC* I, S. 129/31. — Bei L'HOSPITAL ist die Cosinus-Funktion ersetzt durch $x : r$. L'HOSPITAL gibt am Schluss die Differentialgleichung des Problems an, aus der er es gelöst hatte.

237 *BJC* I, S. 132/33. JOHANN weist vor allem darauf hin, dass die Zugbrückenkurve als Epizykloide bei Abrollen eines Kreises auf einem zweiten gleichen Halbmessers entsteht. Anschliessend gibt er eine Erweiterung des Problems (*BJC* I, S. 134/35): Ein Gewicht P kann sich auf einer Kurve $\mathfrak{C}$ bewegen. Es soll durch ein Gewicht Q im Gleichgewicht gehalten werden, das mit P durch eine Kette verbunden ist, die über eine feste Rolle läuft. Dann setzt JOHANN (*BJC* I, S. 136/38) auseinander, dass das von LEIBNIZ (*AE* VIII 1694 = *LMG* V, S. 308) irrtümlich mit der Rektifikation der Hyperbel in Verbindung gebrachte Integral $\int \sqrt{a^4 + x^4} \cdot dx$ in Wirklichkeit auf die Rektifikation der kubischen Parabel $3a^2 y = x^3$ führt — eine Bemerkung, die auch im Brief L'HOSPITALS an LEIBNIZ vom 2.III.1695 (*LMG* II, S. 271) enthalten ist. Hierauf folgt die bereits erwähnte Lösung der Tangentenaufgabe JAKOBS [233].

238 *AE* II 1695 (*BKC*, S. 624/25). JAKOB geht auf die Natur der lösenden Kurve nicht weiter ein.

239 *AE* IV 1695 (*LMG* V, S. 318/20). Jetzt zieht LEIBNIZ die Behauptung über $\int \sqrt{a^4 + x^4} \cdot dx$ zurück und will sich die Sache nochmals genauer überlegen. Die Hyperbelrektifikation hatte ihm schon seit Jahr und Tag Schwierigkeiten gemacht. Um 1675 glaubte er aufgrund einer unrichtigen Rechnung (vgl. HOFMANN, 1949 [42], S. 118), sie lasse sich auf die Hyperbelquadratur zurückführen. Diese Fehlmeinung klingt noch im Brief vom 16.VI.1694 (*LMG* III, S. 142) an JOHANN an. Die unrichtige Behauptung in den *AE* VIII 1694 [237] beruht auf einem Rechenfehler, über den der Brief LEIBNIZens an L'HOSPITAL vom Ende März 1695 (*LMG* II, S. 275) aufklärt: die Hyperbelrektifikation führe auf $\int \sqrt{a^4 + x^4} \cdot dx : x^2$ (wahrscheinlich durch eine Flüchtigkeit bei der Transformation des richtigen Integrals $\int x^2\, dx : \sqrt{a^4 + x^4}$ entstanden); er glaube dieses Integral auf $\int \sqrt{a^4 + x^4} \cdot dx$ reduzieren zu können.

240 *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 661).

241 *AE* XI 1694 (*BJC* I, S. 123/25). JOHANN hatte seine neuen Vorstellungen sehr knapp an den beiden Beispielen $y^2 y' = ax$ (Wendeort $x\,(y^3 - 2ax^2) = 0$, nicht angegeben) und $a^2 y' = x^2 + y^2$ (Wendeort $a^2 x + x^2 y + y^3 = 0$, mitgeteilt) angedeutet. Im Brief an L'HOSPITAL vom Dezember 1694 (*BJS*, S. 247/48) ist ein Stück dieses Kurvensystems nebst Wendeort richtig eingezeichnet.

242 Diese Reihe erscheint erstmals im Brief an LEIBNIZ vom 12.IX.1694 (*LMG* III, S. 150), dann gedruckt in den *AE* XI 1694 (*BJC* I, S. 125/28). Die Erfindung ist angeregt durch LEIBNIZens Mitteilungen in den *AE* IV 1693 (*LMG* V, S. 285/88) über die Reihenentwicklung der Lösungen von Differentialgleichungen durch Ansatz in unbestimmten Koeffizienten. JOHANNS Reihe lässt sich durch schrittweises Anwenden partieller Integrationen gewinnen — das ist der Sinn der Herleitung, die LEIBNIZ im Brief an JOHANN vom 16.XII.1694 (*LMG* III, S. 156) gegeben hat. Es wäre ein Leichtes gewesen, auf diesem Wege zu strengen Konvergenzbetrachtungen zu gelangen. Erstaunlicherweise hat sich JOHANN mit verhältnismässig wenigen und nicht sehr bedeutenden Beispielen zufrieden gegeben, obwohl er durch geschickte Anwendung seiner Reihe die sämtlichen damals bekannten Potenzentwicklungen auf einheitlicher Grundlage hätte herstellen können.

243 Aus den *AE* VIII 1694 (*LMG* V, S. 317/18). Dort wird jedoch in erster Linie von den Näherungspolygonen gesprochen [221]; der Feldbegriff ist nur ganz schwach angedeutet.

244 Hier dürfte JAKOB auf die Schlussbemerkung zu Art. 232 der *Med.* anspielen, wo er die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$ zunächst vermittels des Ansatzes $y = -z' : z$ auf die Form $z'' + x^2 z = 0$ bringt. Nun entwickelt er z in eine nach Potenzen von x^4 fortschreitende Reihe und stellt das für $x = 0$ verschwindende Integral der Ausgangsgleichung dar in der Form

$$y = \frac{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^7}{3\cdot4\cdot7} + \dfrac{x^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11} - \dfrac{x^{15}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15} \pm \cdots}{1 - \dfrac{x^4}{3\cdot4} + \dfrac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} - \dfrac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12} \pm \cdots} = \cdots$$

Das Ganze ist im Nachlass, Stück 12, Ende (*BKC*, S. 1053) gedruckt.

Diese Entwicklung wäre allerdings vermittels der BERNOULLIschen Reihe nicht gut möglich gewesen. Im Brief an LEIBNIZ vom 15.XI.1702 (*LMG* II, S. 65) verweist JAKOB auf die reduzierte Differentialgleichung, gibt sie jedoch in der unrichtigen Form $z'' = x^2 z$. Auf LEIBNIZens Bitte vom April 1703 (*LMG* III, S. 68) um die näheren Einzelheiten sendet JAKOB am 3.X.1703 (*LMG* III, S. 74/75) sowohl die ursprüngliche wie die durch Ausdividieren entstandene Reihe.

245 *AE* XII 1695 (*BKC*, S. 663), nochmals erwähnt in den *AE* VI 1696 (*BKC*, S. 724 und 726). Schrittweise hat sich JAKOB der Lösung dieser Differentialgleichung bemächtigt. Das erkennen wir aus Art. 232 der *Med.* (Nachlass, Stück 12 = *BKC*, S. 1049/53). Dort wird nur die Gleichung $y' = ax^m y + bx^p y^n$ durch Reihenentwicklung behandelt. In den *AE* VII 1696 (*BKC*, S. 731/34) ist das Lösungsverfahren nur flüchtig angedeutet. — Aus dem interessanten Art. 232 ist insbesondere die Einführung der Symbole *ls* für *ln s* und Ncx^p für e^{cx^p} beachtlich.

246 *BKC*, S. 665/71. Vgl. die Anmerkungen 61, 74, 79, 80, 83, 136, 181, 188, 198, 230/31. Geschlossene Notizen über die Vorlagen für diese Ergänzungen sind anscheinend nicht mehr vorhanden.

247 In der einen dieser Aufzeichnungen (*Med.*, Art. 228) wird behauptet, es gebe unendlich viele durch quadratische Konstruktion bestimmbare Streckenpaare *b*, *c* so, dass $\int_b^c dx : \sqrt{a^4 + x^4}$ algebraisch ist. In der anderen Aufzeichnung (Art. 229) glaubt JAKOB eine Methode angeben zu können, mittels deren er nach Adjunktion einer einzigen transzendenten Konstanten durch quadratische Konstruktionen unendlich viele Punkte der Kettenlinie konstruieren könnte. Unrichtig ist hier nur das eingeschlagene Verfahren; nicht der Satz. Ist z.B. die Grundstrecke *a* und die transzendente Strecke $b = \frac{a}{2}(e + 1 : e)$ bekannt, dann lassen sich tatsächlich unendlich viele Punkte der Kettenlinie $y = \frac{a}{2}(e^{x:a} + e^{-x:a})$ wie gefordert aus *a* und *b* herstellen. Die Menge der auf diesem Wege herstellbaren Punkte der Kettenlinie ist in sich dicht. In den *AE* VII 1696 (*BKC*, S. 735/36) erwähnt JAKOB algebraische Punktkonstruktionen an transzendenten Kurven. Er bezweifelt jedoch, dass es hierfür allgemeine Regeln gebe.

248 *BJC* I, S. 149/52 = *BKC*, S. 718/22.

249 *AE* VI 1696 = *BKC*, S. 723/24.

250 *AE* VI 1696 = *BJC* I, S. 159/60.

251 *AE* VI 1698 = *BJC* I, S. 242/47. Die Abhandlung ging am 14.XII.1697 (*LMG* II, S. 473) an LEIBNIZ und wurde in Leipzig von TSCHIRNHAUS eingesehen, der die BERNOULLIsche Konstruktion im Brief an LEIBNIZ vom 18.III.1698 (*LBG*, S. 503/05) als unrichtig erklärte. Dieser gab hierüber am 4.IV.1698 (*LMG* III, S. 482) an JOHANN Nachricht, der sich nunmehr in seiner Antwort vom 26.IV.1698 (*LMG* III, S. 485/86) heftig über die Druckverzögerung beklagte. Er erhielt mit LEIBNIZens Brief vom 25.V.1698 einen Auszug aus TSCHIRNHAUSens Schreiben (*LMG* III, S. 489/92). In der Antwort vom 10.VI.1698 (*LMG* III, S. 492/95) setzte er sich so geschickt zur Wehr, dass die Abhandlung nunmehr sogleich gedruckt wurde. Leider ging dieser eine Note TSCHIRNHAUSens voraus (*AE* VI 1698, S. 259/61), worin sich dieser in erstaunlicher Skrupellosigkeit den entscheidenden Gedanken JOHANNS aneignet.

252 *BKC*, S. 725/28. Die dort ohne Ableitung mitgeteilte Konstruktion stammt aus den *Med.*, Art. 233 (Nachlass, Stück 21 = *BKC*, S. 1086/87, etwas abgeändert). JAKOB sucht eine Kurve mit dem laufenden Punkt C, die im Ursprung A von der X-Achse berührt wird. Die Kurventangente schneidet die X-Achse in D; das Lot aus C trifft auf die X-Achse in B. Mit AD = *x*, DB = *y*, DC = *p* (*x*) ergibt sich nach Umformung $\int_0^x \frac{dx}{p} = ln \frac{p - y}{p + y}$. Dann folgt die Konstruktion. Sie ist als Erweiterung der für den Sonderfall $p = nx$ gegebenen[194] anzusehen und mit einer ähnlichen LEIBNIZens (*AE* IX 1693 = *LMG* V, S. 299/301) verwandt.

253 *BKC*, S. 731/35.

254 *AE* II 1696 (*LMG* V, S. 330/31). LEIBNIZ sagt, die Gleichung könne auf $\eta' = \pi(\xi)\eta + \varkappa(\xi)$ zurückgeführt werden. Diese Gleichung hatte er schon im Brief an L'HOSPITAL vom 6.I.1695 (*LMG* II, S. 257) allgemein gelöst.

255 Im Brief an LEIBNIZ vom 4.IX.1696 (*LMG* III, S. 323/24) führt JOHANN die allgemeine Differentialgleichung vermöge des Ansatzes $y^n = \eta^{\frac{n}{1-n}}$ zurück auf eine

lineare und löst diese vermittels $\eta = uv$. Im Druck befindet sich das in den *AE* III 1697 (*BJC* I, S. 175/76).

256 *BKC*, S. 745/66.

257 *BKC*, S. 748.

258 Wie schon in Anmerkung 124 erwähnt, wusste JAKOB damals noch nichts von den Mitteilungen über NEWTONS Vorgehen in den WALLISschen *Opera* II[124] von 1693.

259 Ausgabe von 1713, S. 95/98. Dort wird ausdrücklich auf die Mängel des WALLISschen Verfahrens der unvollständigen Induktion hingewiesen und die Summierung vermittels der „BERNOULLIschen Zahlen" allgemein durchgeführt. Dabei steht der Schluss von n auf $n + 1$ an Beispielen im Vordergrund. Die *Med.* enthalten nichts hierüber.

260 Unabhängig von JAKOB und fast gleichzeitig hatte auch LEIBNIZ das nämliche Ergebnis gefunden, jedoch nicht geometrisch, sondern vermittels der logarithmischen Funktion erklärt: Brief an JOHANN vom 19.XI.1696 (*LMG* III, S. 337).

261 JAKOB geht aus von der Gleichung $x^2 = a^2 \pm a^2 y^2$, bestimmt das Element der Sektorfläche in der Form $\frac{x\,dy - y\,dx}{2} = \frac{a^2\,dy}{2x} = \mp \frac{a^2\,dx}{2y}$ und setzt dann $x = a \pm t$. Die Sektorfläche stellt er dar durch $\int_0^t \frac{a\,dt}{2\sqrt{2at \pm t^2}}$, rationalisiert vermittels $\sqrt{2at \pm t^2} = \frac{t}{z}$, entwickelt nach Potenzen von z und integriert dann gliedweise.

262 *BJC* I, S. 161. — Die Aufgabe war bereits am 15.V.1696 (*BJS*, S. 319) an VARIGNON gegangen, der sie den Pariser Mathematikern mitteilte, ferner nach England (wahrscheinlich an CLUVER; vgl. *LMG* III, S. 283) und am 19.VI.1696 (*LMG* III, S. 283/84) an LEIBNIZ. Dieser gab am 26.VI.1696 (*LMG* III, S. 290/95) die Auflösung und wollte das Problem auch in französischen und italienischen Zeitschriften anzeigen. Da es aber Druckverzögerung gab, schlug er im Brief vom 2.IX.1696 (*LMG* III, S. 322/23) Verschiebung der ursprünglichen Frist (Ende 1696) auf Ostern 1697 vor, wozu JOHANN am 22.IX.1696 (*LMG* III, S. 330) seine Einwilligung gab. Dieser neue Termin wird in den Anzeigen in Nr. 38 des *JS* vom 19.XI.1696 (*LD* II_1, S. 94/97), im *GdL* 1695 (Druck 1696; vgl. *LD* V, S. 116), in den *AE* XII 1696 (*BJC* I, S. 165), in einem später als *Programm* bezeichneten Flugblatt JOHANNS vom 1.I.1697 (*BJC* I, S. 166/69) und in der *HOS* XII/II 1696/97, S. 284 genannt.

263 Im Brief an JOHANN vom 26.VI.1696 (*LMG* III, S. 290/95). Zunächst kennzeichnet LEIBNIZ den Punkt P auf einer gegebenen Horizontalen zwischen A und B, der (unter Beibehaltung der Laufgeschwindigkeit im Knick bei P) bei Bewegung auf der Doppelstrecke APB kürzeste Fallzeit erzeugt. Dann überträgt er die erhaltene Bedingung auf je drei benachbarte Punkte eines Streckenzuges kürzester Laufzeit zwischen A und B, dessen Ecken in aequidistanten Horizontalen zwischen A und B liegen. Durch Grenzübergang erhält er hieraus die Bedingung $\frac{dx}{ds} : \frac{dy}{dt} = \text{const.}$, wobei die Fallzeit t in senkrechter Richtung proportional zu $\sqrt{y}$ ist. Daraus folgt $\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{y}{2a}}$ und hieraus

$$x = \int_0^y \sqrt{\frac{y}{2a - y}}\,dy = \int_0^y \frac{a\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} - \sqrt{2ay - y^2}\,.$$

In der Eile bemerkt er noch nicht, dass sich als Lösungskurve eine Zykloide ergibt; darauf wird erst von JOHANN hingewiesen (Brief vom 31.VII.1696 = *LMG* III, S. 299).

264 Im Brief an LEIBNIZ vom 31.VII.1696 (*LMG* III, S. 302/06). JOHANN denkt sich die Brachystochrone als Lichtweg in horizontal geschichteter Atmosphäre, wobei er dem Vorgehen FERMATS (*Opera varia*[82], S. 156) bezw. LEIBNIZens[184] folgt. Dem Brechungsgesetz gibt er die Fassung $\frac{\sin\alpha}{u} = \frac{1}{c} = \text{const.}$ Dabei ist α der Winkel der Kurve mit der y-Achse, also $\sin\alpha = \frac{dx}{ds}$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u in der atmosphärischen Schicht ist von y abhängig. Hieraus ergibt sich $dx = \frac{u\,dy}{\sqrt{c^2 - u^2}}$. Aus dem Fallgesetz folgt aber $u^2 = cy$, also $dx = \sqrt{\frac{y}{c - y}}\,dy$ usw.

265 *LMG* III, S. 306/08. JOHANN kennzeichnet zunächst jenen Kreisbogen durch zwei Punkte A, B, auf dem ein Körper zwischen A und B in kürzester Zeit fällt. Durch Grenzübergang folgt, dass der Krümmungsradius der Brachystochrone das Doppelte des Abschnittes auf der Kurvennormalen vom Kurvenpunkt bis zur x-Achse ist. Das liefert die Differentialgleichung der Kurve.

266 Brief vom 10.VIII.1696 (*LMG* III, S. 310); im Druck erschien sie erst am Ende der Abhandlung in der *Histoire de l'Académie Royale des sciences avec les Mémoires de mathématique et de physique* (= *HMP*) 1718 (*BJC* II, S. 267/69).

267 *PT 19*, Nr. 224 vom I 1697 = *Opera*[154] IV, S. 415. JOHANN erhielt die Lösung um den 20.III.1697. Eine Abschrift ging im Brief vom 30.III.1697 (*LMG* III, S. 388/89) an LEIBNIZ und wurde in den *AE* V 1697, S. 223/24 abgedruckt.

268 Ein vom 26.XII.1696 datiertes Schriftstück SAUVEURS (*BJS*, S. 334/37) lag dem Brief L'HOSPITALS an JOHANN vom 31.XII.1696 (*BJS*, S. 333/34) bei. L'HOSPITAL entdeckte den Fehler (unzulässiger Grenzübergang) nicht, wohl aber fanden ihn JOHANN und LEIBNIZ (Brief an JOHANN vom 8.II.1697 = *LMG* III, S. 360/63), dem SAUVEURS Schreiben von JOHANN am 29.I.1697 (*LMG* III, S. 354/57) übermittelt worden war.

269 Dieser nicht näher bekannte junge Mann hatte geglaubt, $ax^2 = y^3$ sei die Brachystochrone. Vgl. JOHANN an L'HOSPITAL, 30.III.1697 (*BJS*, S. 348), sowie die Briefe JOHANNS an LEIBNIZ vom 30.III. und 17.VI.1697 (*LMG* III, S. 387 und 420).

270 L'HOSPITAL berichtet hierüber im Brief an JOHANN vom 3.VI.1697 (*BJS*, S. 349), LAHIRE habe auf mehreren Wegen „gefunden", dass die Brachystochrone eine kubische Parabel sei.

271 L'HOSPITAL kam zunächst mit der Fragestellung nicht zurecht. Im Brief an JOHANN vom 15.VI.1696 (*BJS*, S. 319) erbat er eine rein geometrische Form des Problems und erhielt am 30.VI.1696 (*BJS*, S. 321) die Fassung: Wann nimmt $\int \frac{ds}{\sqrt{y}}$ seinen kleinsten Wert an? JOHANN versäumt allerdings, zu sagen, dass hier nicht s, sondern x als die Integrationsveränderliche anzusehen ist. L'HOSPITAL lässt sein Verfahren am 25.II.1697 (*BJS*, S. 342/45) an JOHANN gehen, der den Brief am 5.III.1697 (*LMG* III, S. 372/75) an LEIBNIZ sendet. In *BJS*, S. 343/45 ist auseinandergesetzt, dass L'HOSPITAL unzulässige Schlüsse verwendet und nur durch Zufall zum richtigen Ergebnis kommt.

272 Das wissen wir durch einen Zufall. L'HOSPITAL hatte von JAKOB, mit dem er in einem nicht mehr erhaltenen Briefwechsel stand, ein Paket mit den letzten Nummern der *AE* empfangen, das versehentlich einen Zettel mit Aufzeichnungen über das Problem enthielt. Diesen Zettel sandte L'HOSPITAL am 30.XI.1696 (*BJS*, S. 326) an JOHANN, der sich in der Antwort vom 21.XII.1696 (*BJS*, S. 329) über des Bruders Versuch lustig machte, den Kreis als Brachystochrone aufzufassen (wie es schon GALILEI getan hatte: *Discorsi*[107], 3. Tag, *prop.* 36, *scholium*). — In der gedruckten Abhandlung (*AE* V 1697 = *BKC*, S. 769) teilt JAKOB mit, LEIBNIZ habe ihm im (verschollenen) Brief vom 23.IX.1696 angezeigt, dass er die Lösung besitze. JAKOB fügt hinzu, er habe seine Lösung am 16.X.1696 gefunden und Freunden (wohl S. BATTIER und HERMANN) gezeigt. — In der *HOS* VI 1697 (*BJC* I, S. 200) weist JOHANN öffentlich darauf hin, dass JAKOB die Auffassung GALILEIS längere Zeit geteilt habe und nur durch grosse Anstrengungen zur Lösung des ganz einfachen Problems gekommen sei.

273 Im Brief an LEIBNIZ vom 6.II.1697 (*LMG* III, S. 49) wird die Sendung angekündet mit der ausdrücklichen Auflage, sie nur mit den andern gemeinsam zu veröffentlichen. Am 15.III.1697 (*LMG* III, S. 377) schreibt LEIBNIZ an JOHANN, das MS. sei bei MENCKE eingetroffen.

274 Der Aufbau ist aus *Med.*, Art. 237 genau erkennbar. Die Druckvorlage für die *AE* V 1697 (*BKC*, S. 769/74) weicht nur wenig von der Aufzeichnung in den *Med.* ab, ist jedoch wegen umständlicher Ausdrucksweise etwas schwieriger zu lesen. Die Einzelausführung gleicht jener LEIBNIZENS; der einzige Unterschied ist, dass die zwischen A und B liegende Horizontale durch den Mittelpunkt von AB hindurchgeht. Auch JAKOB war sich des Zusammenhanges des Brachystochronenproblems mit der Bewegung in einem geschichteten Medium bewusst; das zeigt ein Hinweis am Schluss seiner Ausführungen.

275 Dies wird auch von LEIBNIZ, der JAKOBS Aufsatz am 5.VI.1697, d.h. sogleich nach Erhalt des Mai-Heftes der *AE*, an JOHANN sandte (*LMG* III, S. 407/13) ausdrücklich hervorgehoben. Bei dieser Gelegenheit macht LEIBNIZ einen neuen Versöhnungsversuch (*LMG* III, S. 405/06): Er gestehe zu, dass JAKOB schwer zu behandeln sei, halte ihn jedoch nicht für unversöhnlich und rate, JOHANN möge bei passender Gelegenheit deutlicher hervorheben, wieviel er von seinem älteren Bruder gelernt habe.

[276] Hintereinander folgen die Aufsätze von LEIBNIZ (*LMG* V, S. 331/36), JOHANN (*BJC* I, S. 187/93), JAKOB (*BKC*, S. 768/78) und L'HOSPITAL (*BJS*, S. 342/44). Angefügt ist ein Beitrag TSCHIRNHAUSens (*AE*, S. 220/23), der vermutlich durch MENCKE erfahren hatte, dass die lösende Kurve eine Zykloide sei. Mehr als diesen Hinweis können wir aus TSCHIRNHAUSens Bemerkungen nicht entnehmen, vor allem nichts über die eingeschlagene Lösungsmethode. Abschliessend wird NEWTONS Lösung, ein Wiederdruck der Mitteilung in den *PT* I 1697 [267], abgedruckt. Die meisten dieser Beiträge enthalten auch Lösungen der von JOHANN im Programm vom 1.I.1697 [262] gestellten Aufgabe: Jene Kurve zu ermitteln, die von jeder Geraden durch den Punkt O in genau zwei Punkten P und Q derart geschnitten wird, dass $OP^m + OQ^m = \text{const.}$

[277] *BKC*, S. 775.

[278] Das Problem wird in Art. 240/41 der *Med.* eingehend behandelt. Ihr Inhalt ist in die ziemlich ausführliche Darstellung in den *AE* V 1698 (*BKC*, S. 787/94) übergegangen. JOHANN hatte die Lösung bereits in der *HOS* VI 1697 (*BJC* I, S. 202/03) durch die Bemerkung gekennzeichnet, die Zykloide müsse auf die fragliche Gerade senkrecht auftreffen. Auch L'HOSPITAL gab eine Lösung: *AE* I 1698, S. 48/52.

Im Anschluss an seine Ausführungen verallgemeinert JAKOB das Problem (*BKC*, S. 788/90): Gegeben sei eine Kurvenschar durch O, deren Exemplare aus O ähnlich liegen, ferner eine Linie $\mathfrak{L}$, die von den Kurven der Schar bezw. in P getroffen werden soll. Auf welcher Kurve der Schar erhält eine passende Funktion, die von der Lage des Punktes P abhängt, einen Extremwert? Als einfachstes Beispiel wird in Wiedergabe von Art. 236 gefragt, auf welchem von O senkrecht nach unten ausgehenden Kreisbogen ein fallender Körper mit grösster Wucht auf eine gegebene Senkrechte (nicht durch O) auftrifft. Für beliebige Kurven, die zu einander affin sind, wird das Problem in Art. 253 der *Med.* behandelt (Nachlass, Stück 4 = *BKC*, S. 1017/20). Im MS. verweist JAKOB auf einen am 8.V.1698 abgesandten verschollenen Brief unbekannten Empfängers.

[279] Der wesentliche Inhalt ist in verbesserter Redaktion übergegangen in die isoperimetrische Dissertation vom 1.III.1701 (Basel 1701 = *BKC*, S. 895/920), die auch in den *AE* V 1701 erschienen ist.

[280] Dieser schon in den *AE* VI 1691 (*BJC* I, S. 50, Nr. 13) bei JOHANN anklingende Gedanke wird erstmals von LEIBNIZ im Brief an JOHANN vom 16.V.1695 (*LMG* III, S. 176) klar ausgesprochen. Keiner von beiden ist zu einem rechnerisch brauchbaren Ansatz gekommen.

[281] Um das Verfahren in JAKOBS Sinn zu Ende zu führen (so steht es in der Dissertation vom 1.III.1701 = *BKC*, S. 917/19), berücksichtigen wir die Beziehung $dx d^2 x + dy d^2 y = 0$. Jetzt folgt $3 \cdot \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^3x}{d^2x}$ und nach Integration $\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 = a \frac{d^2x}{ds^2}$. Mit $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{a}$ ergibt sich $\frac{dx}{ds} = \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}$, $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\ldots^3}} \frac{dt}{ds}$; also $t = s$ usw. Wir würden nunmehr zuerst $x = \sqrt{a^2+s^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ bestimmen, dann quadrieren und differentieren.

[282] Mittels $dx d^2 x = ds d^2 s$ würde sich $3 \frac{d^2s}{ds} = \frac{d^3x}{d^2x}$ ergeben, also $\left(\frac{ds}{dy}\right)^3 = -a \frac{d^2x}{d^2y}$. Daraus folgt, dass die Lösung konstanten Krümmungshalbmesser ρ hat, also ein Kreis ist. — In der isoperimetrischen Dissertation fehlt dieses Beispiel, weil dort gleich der allgemeine Fall erledigt wird.

[283] Wir gehen nicht auf diese Rechnung ein, weil unten (Haupttext nach Anmerkung 306) der allgemeine Fall $\int p(x)\, dy$ ausführlich behandelt wird.

[284] Das teilt JOHANN im Brief an LEIBNIZ vom 17.VI.1697 (*LMG* III, S. 414) mit. Er hatte einen Sonderdruck als Beilage zu einem (verschollenen) Brief MENCKES erhalten, der wahrscheinlich gleichzeitig mit MENCKES Brief vom 1.VI.1697 an LEIBNIZ (vgl. *LMG* III, S. 406) abgesandt wurde. Auch LEIBNIZ sandte einen Sonderdruck an JOHANN (Beilage zum Brief vom 5.VI.1697 = *LMG* III, S. 407/13).

[285] *LMG* III, S. 416/18.

[286] *BJC* I, S. 202.

[287] *LMG* III, S. 427/31. JOHANN denkt sich ein rechteckiges Tuch, das vollständig biegsam, unelastisch und flüssigkeitsundurchlässig ist, an zwei Gegenseiten in gleicher Höhe festgeklemmt und seitlich durch senkrechte Wände abgeschlossen. Nun wird die entstehende zylindrische Mulde stricheben mit Flüssigkeit gefüllt. Gefragt ist, bei welcher Profilform des Tuches der Schwerpunkt der als konstant angesehenen Flüssigkeitsmenge am tiefsten liegt. Die freie Flüssigkeitsoberfläche wird als y-Achse eingeführt, der schichtweise in vorgebener Art veränderliche Flüssigkeitsdruck proportional

zu x^m angesehen. Da das Tuch feste Ausmasse hat, muss das Maximum von $\int x^m dy$ gemeint sein. JOHANN kennzeichnet die Profilform des Tuches aus $y = \int \frac{(b^m + x^m)\,dx}{\sqrt{a^{2m} - (b^m + x^m)^2}}$ und stellt fest, dass zum Maximum vom $\int x^m dy$ ein Minimum von $\int x^{-m} ds$ gehört.

288 Abgedruckt in Nr. 39 des *JS* vom 2.XII.1697; ein lateinischer Auszug befindet sich in den *AE* I 1698. Die französische Fassung ist wiederabgedruckt in *BJC* I, S.206/14 und *BKC*, S. 814/21. Die fragliche Stelle: *BJC* I, S. 208/11.

289 *LMG* III, S. 506/14. Da LEIBNIZ diesen Brief nach dem Überlesen verlegte, erhielt er unterm 2.VIII.1698 (*LMG* III, S. 517) nochmals eine Abschrift; eines dieser MS. ging auf Bitten JOHANNS (Briefe vom 21.II. und 14.III.1699 = *LMG* III, S. 572 und 581) als Beilage zum Brief LEIBNIZens vom 24.III.1699 (*LMG* III, S. 578) wieder zurück. Am 22.I.1701 ging das MS. in versiegeltem Umschlag an VARIGNON (vgl. *BJS*, S. 373) und wurde von diesem der *Académie* am 1.II.1701 präsentiert (*BJC* I, S. 424); der Umschlag sollte erst nach Eingang der Lösung JAKOBS geöffnet werden. Als JOHANN durch einen Brief VARIGNONS vom 27.II.1701 erfuhr, dass der Bruder persönlich nach Paris kommen und dort seine Lösung vorlegen wolle, zog er das MS. zurück; es wurde ihm am 23.III.1701 durch FONTENELLE übersandt. Erst nach dem Tod des Bruders ging die Sendung erneut nach Paris und wurde dort am 17.IV.1706 eröffnet. Das ursprünglich lateinische MS. erschien in französischer Übersetzung in den *HMP* 1706 (*BJC* I, S. 424/35).

290 JOHANN gibt zwei Arten von Lösungen, eine direkte und eine indirekte. Die direkte Lösung beruht auf einer infinitesimalgeometrischen Überlegung unter Beschränkung auf Glieder 2. Ordnung. JOHANN geht von zwei nahe bei einander liegenden Kurvenpunkten A und B aus und schaltet zwei Punkte P und Q so ein, dass AP + PB = = AQ + QB. Er findet richtig, dass $\int p(x)\,dy$ sein Maximum für $\frac{dy}{ds} = \frac{p(x)}{a}$ annimmt. Die indirekte Lösung ist die in Anmerkung 287 gekennzeichnete vermittels der hydrostatischen Hilfsüberlegung. Anschliessend behauptet JOHANN fälschlich, $\int q(s)\,dy$ besitze eine durch $\frac{dq}{ds} = a\,\frac{d^2y}{dx^2}$ gekennzeichnete Extremale.

291 Das sagt LEIBNIZ sogar in den *AE* IV 1701 (*LD* III, S. 368/69), wo er auf Wunsch JOHANNS den richtigen Eingang der lösenden Analysis in der Sendung vom 15.VII.1698 [289] bestätigt.

292 Am 9.VI.1701 (*LMG* III, S. 340) hatte L'HOSPITAL an LEIBNIZ geschrieben, er habe gerade JAKOBS isoperimetrische Dissertation vom 1.III.1701 erhalten und voller Interesse überflogen. Ihm scheine das angewendete direkte Verfahren gut zu sein. LEIBNIZ knüpft im Brief an JOHANN vom 24.VI.1701 (*LMG* III, S. 674) an diese Bemerkung an. Er halte die Verwendung von Gliedern 3. Ordnung für überflüssig und sehe JOHANNS Verfahren als besser an. So schreibt er auch an L'HOSPITAL am 26.IX.1701 (*LMG* II, S. 343).

293 Es handelt sich um die Wiedergabe des Briefs an VARIGNON vom 15.X.1697 (*BJC* I, S. 206/14).

294 *BKC*, S. 821/22.

295 *BJC* I, S. 215/20.

296 *BKC*, S. 827.

297 *BJC* I, S. 221/22.

298 *BKC*, S. 829/39.

299 *BKC*, S. 839/40.

300 *BJC* I, S. 231/39.

301 Vgl. *BJS*, S. 366, Anmerkung.

302 *BKC*, S. 873.

303 Selbständig gedruckt in Basel 1700. In *BKC*, S. 874/87 ist nur der auf das rein Mathematische beschränkte Auszug in den *AE* VI 1700 aufgenommen. Das dort Fehlende ist von Ch. BOSSUT in den *Observations sur la physique, sur l'histoire naturelle et sur les arts 41*, 1792, S. 161/73 wiedergegeben.

304 *BKC*, S. 874/80.

305 Nachlass, Stück 32 = *BKC*, S. 1134/39.

306 Vgl. die Stelle im Haupttext nach Anmerkung 279. — Dieses Beispiel erscheint auch in der Dissertation vom 1.III.1701 (*BKC*, S. 909/12).

307 Das wird in Artikel 246 der *Med.* nur knapp angedeutet und erst in *prop.* 6 der Dissertation vom 1.III.1701 (*BKC*, S. 907/08) näher ausgeführt, jedoch nicht in

der allgemeinen Form des Haupttextes, sondern nur am Erläuterungsbeispiel $p(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$.

308 In der Anmerkung zu *BKC*, S. 1135 sagt CRAMER, dass es keines intuitiven Ansatzes bedurft hätte; denn nach Verwendung von $dxd^2x = dsd^2s$ und Division mit $hds^2 d^2x$ ergibt sich die integrable Differentialgleichung $\frac{d^3x}{d^2x} - 3\frac{d^2s}{ds} = \frac{dh}{h}$.

309 *BKC*, S. 880/82.

310 JAKOB stellt fest, dass die Extremale des zu einem Minimum werdenden isoperimetrischen Integrals $\int q(s)\,dy$ nicht durch $\frac{dq}{ds} = a\frac{d^2y}{dx^2}$ gekennzeichnet wird, wie JOHANN behauptet hatte [290] (Schreiben an VARIGNON vom 15.X.1697), sondern durch $dy = qds : \sqrt{a^2 + q^2}$.

311 JAKOB vertraute die Sendung nicht der Post an, sondern liess sie durch den verlässlichen Jk. HERMANN persönlich in Groningen überbringen. JOHANN berichtet an LEIBNIZ am 7.V.1701 (*LMG* III, S. 668/69) kurz über HERMANNS Besuch, über die seiner Meinung nach überflüssige Einschaltung von zwei Zwischenpunkten auf der Extremalen und über den Entschluss, die eigene Lösung erst dann preiszugeben, wenn des Bruders Veröffentlichung bei den von beiden Seiten anerkannten Preisrichtern eingetroffen sei. Aus dem noch unveröffentlichten Brief JAKOBS an N. FATIO vom 9.VIII.1701 erfahren wir, JOHANN habe HERMANNS Bitte um die Aushändigung der Analysis seiner Lösung mit den Worten abgelehnt: er sei nicht verpflichtet, diese Analysis irgendjemand zu zeigen.

312 Zum Glück für JOHANN scheiterten dessen Versuche, nach Erhalt des offenen Briefes [303] und der Dissertation [311] JAKOBS in den *AE* oder im *JS* eine weitere Gegenerklärung einrücken zu lassen.

313 London 1715, *prop.* 17, *Probl.* 12 = S. 68/70.

314 JAKOBS Name wird nicht genannt, jedoch ist schwerlich anzunehmen, dass TAYLOR nichts von seinem Vorgänger wusste.

315 *BJC* II, S. 235/69. Eine lateinische Fassung, die nicht in die *BJC* übergegangen ist, erschien in den *AE* I und II 1718.

316 Vermutlich ist HERMANN gemeint, der seine eigene Überarbeitung der JAKOBschen Methode in den *AE* I 1718, S. 32/38 erscheinen liess.

317 *AE* IX 1697 (*BKC*, S. 782/85). Diese Note wird von JAKOB selbst als Ergänzung zur Untersuchung in den *AE* VII 1696 [253] über die Differentialgleichung $y' = p(x)\,y + q(x)\,y^n$ angesehen.

318 Nachlass, Stück 12 = *BKC*, S. 1050/53.

319 *BKC*, S. 784.

320 Diese Formel ist nicht mit in den Nachlassdruck aufgenommen.

321 *BJC* I, S. 193.

322 Mit Orthogonaltrajektorien hatte sich JOHANN erstmals im Sommer 1694 beschäftigt. So erwähnt er im Brief an LEIBNIZ vom 12.IX.1694 (*LMG* III, S. 151/52) die sich senkrecht durchschneidenden Scharen $x^n = u^{n-1}y$, $nx^2 + y^2 = v^2$ und $x^2 = 2p(y + u)$, $y + p \cdot ln\frac{x}{v} = 0$. Ausserdem weiss er, dass sich Lichtstrahl und Wellenfront im Sinne der HUYGENSschen Theorie senkrecht durchschneiden. An der nämlichen Stelle wirft er auch das Isogonaltrajektorienproblem auf, erläutert am Beispiel der logarithmischen Spiralen um den Ursprung, von denen die Fahrstrahlen aus dem Ursprung unter festem Winkel geschnitten werden. Im Zusammenhang mit der Lösung des Brachystochronenproblems entdeckte er dann, dass sich die von einem Punkt A auf den Brachystochronen durch A fallenden Körper in gleichen Zeiten wieder auf einer Zykloide befinden, die von der Gesamtheit der Brachystochronen senkrecht geschnitten wird. (Synchronenproblem, erstmals erwähnt im Brief an LEIBNIZ vom 31.VII.1696 = *LMG* III, S. 299/300). Dort wird ergänzend bemerkt, eine ähnliche Eigenschaft komme auch der logarithmischen Spirale zu. Schon im ersten Entwurf des Brachystochronen-Aufsatzes (Druck V 1697), der dem erwähnten Brief an LEIBNIZ beilag (*LMG* III, S. 302/09), wird die Bestimmung der Orthogonaltrajektorien der logarithmischen Kurven gefordert. Da LEIBNIZ keine Zeit zur Auflösung fand, sandte JOHANN seine Lösung am 6.XI.1696 (*LMG* III, S. 333/34).

323 Das geht aus einem Eintrag in Art. 242 der *Med.* hervor. Dort sind die beiden komplizierteren Beispiele ausführlich behandelt, während der Druck in den *AE* V 1698 (*BKC*, S. 810/12) nur die Konstruktion und Diskussion einer einzigen der Lösungskurven enthält.

324 *BKC*, S. 806/13.

325 In etwas modernisierter Bezeichnungsweise heisst die Ausgangsgleichung der Schar $x = a\,ln\left(1 - \frac{y}{u}\right)$; eine dazu senkrechte Kurve wird durch $2ax + y^2 + a^2 e^{-\frac{x}{a}} = av$ gekennzeichnet.

326 Jetzt heisst die Ausgangsschar $x = u \cdot ln\frac{y}{a}$; eine dazu senkrechte Kurve ergibt sich aus $x^2 = \frac{u^2}{2} - y^2\,ln\frac{y}{a} + uv$.

327 *AE* X 1698 = *BJC* I, S. 266/71.

328 Es handelt sich um die Differentiation eines Integrals nach einem Parameter. Auf diese Methode war LEIBNIZ verfallen, um die von JOHANN am 27.VII.1697 (*LMG* III, S. 441) gestellte Frage zu beantworten, wie die Kurven zu kennzeichnen seien, die von den Endpunkten gleichlanger Bögen aus dem Ursprung auf den Ellipsen $y^2 = \lambda x\,(2a - x)$ gebildet werden. Das LEIBNIZsche Verfahren ist in einer Beilage zum Brief an JOHANN vom 13.VIII.1697 (*LMG* III, S. 451/54) enthalten und wird am Beispiel der logarithmischen Kurven $y = u \cdot ln\frac{x}{a}$ entwickelt. Gemeinsamer Anfangspunkt der Bögen ist diesmal der Punkt $(a, 0)$. LEIBNIZens Methode ist erst durch GERHARDT bekannt geworden. — JOHANN wusste nicht, dass sich auch JAKOB erfolgreich mit der nämlichen Frage beschäftigt hatte. Dieser betrachtet in Art. 254 der *Med.* (Nachlass, Stück 5 = *BKC*, S. 1021/23) eine Schar affiner Kurven durch O und bestimmt aufgrund einer Methode, die der in Anmerkung 333 angedeuteten verwandt ist, die Tangenteneigenschaft jener Kurve, deren Punkte P auf den einzelnen Kurven der Schar gleichlange Bögen OP abschneiden. In diesem Zusammenhang wird der verschollene Brief vom 8.V.1698 [278] nochmals erwähnt. Anschliessend behandelt JAKOB das Problem, indem er eine beliebige Kurvenschar zugrunde legt, die aus ihrem Parameter bestimmt wird.

329 Die Orthogonaltrajektorien der Parabelschar $y^2 = u\,(x - u)$ bestimmt JOHANN aus $\frac{du}{u} = -\frac{(a^2 + 4\eta^2)\,d\eta}{(3a^2 + 2\eta^2)\,\eta}$. In *BJC* I, S. 271 hatte er eine unrichtige Formel gegeben, die in einer Akademie-Abhandlung von 1702 (*BJC* I, S. 395) verbessert ist. — Aus den Anmerkungen CRAMERS zu *BKC*, S. 808 und 812 lässt sich erkennen, wie JOHANN vorgegangen ist. Mittels $ax = u\xi$, $ay = u\eta$ wird die Ausgangsgleichung zu $\eta^2 = a\,(\xi - a)$. Daraus folgt, dass die Parabeln der Schar aus dem Ursprung ähnlich liegen. Nun ist $dx = ud\xi + \xi du$, $dy = ud\eta + \eta du$. Also gilt für die Orthogonaltrajektorien $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{ud\xi + \xi du}{ud\eta + \eta du}$, d.h. $\frac{du}{u} = -\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\xi d\xi + \eta d\eta}$. Wird jetzt aus der Parabelgleichung eingesetzt, dann ergibt sich JOHANNS Formel. Dieser verschweigt allerdings, dass die Parabelschar von den beiden Geraden $x^2 - 4y^2 = 0$ berührt wird, und dass die Orthogonaltrajektorien wendepunktfrei sind, bei steigbügelartiger Form in Spitzen auf den Einhüllenden der Parabeln aufsitzen und die Y-Achse zur gemeinsamen Asymptote haben. Das Isogonaltrajektorienproblem an den um den Ursprung gedrehten Kurven löst JOHANN, indem er modifizierte Polarkoordinaten (r und $t = a\varphi$) verwendet.

330 *BJC* I, S. 204/05.

331 *BKC*, S. 796/806.

332 *AE*, S. 48/52. — Die Art der Lösung ist aus dem Brief L'HOSPITALS an JOHANN vom 27.IX.1697 (*BJS*, S. 351) erkenntlich.

333 Im Anschluss an CRAMER (*BKC*, S. 803) gibt Herr SPIESS (*BJS*, S. 355) eine schöne Wiederherstellung der Konstruktion JAKOBS. Er geht aus von der Kurve $y = y\,(x)$ mit dem laufenden Punkt $P\,(x, y)$ und dem zugeordneten Flächeninhalt $F\,(x) = \int_0^x y dx$. Die zu dieser Kurve affin-benachbarte habe unter Beibehaltung der Abszisse x die Ordinate $y + \delta y$ und den laufenden Punkt $\Pi\,(x, y + \delta y)$. Die zugeordnete Fläche ist $F + \delta F$. Wegen der Affinität gilt $\delta F : F = \delta y : y$. — Nun gehen wir auf der Ausgangskurve zum Punkt $Q\,(x + dx, y + dy)$ über. Der zugeordnete Flächeninhalt ist $F\,(x + dx) = F + dF = \int_0^{x+dx} y dx$. Also ist (unter Beschränkung auf Grössen 1. Ordnung) $dF = y\,(x)\,dx$. Gesucht ist jene Kurve ΠQ, längs deren $\delta F = dF$; also $y^2 : F = \frac{\delta y}{dx}$ ist. Nun ist

$$\delta y = P\Pi = [(y + \delta y) - y\,(x + dx)] + [y\,(x + dx) - y\,(x)]$$

und $\frac{(y + \delta y) - y(x + dx)}{dx} \approx \frac{y}{t}$, unter t die durch ΠQ auf der χ-Achse bestimmte Subtangente verstanden. Entsprechend ist $\frac{y(x + dx) - y(x)}{dx} \approx \frac{y}{s}$, unter s die durch PQ auf der X-Achse bestimmte Subtangente verstanden. Nun ist aber $y : s = y'$ aus der gegebenen Kurve bekannt, also die Tangente an die gesuchte Kurve konstruierbar. JAKOB konstruiert genau nach dieser Vorschrift; JOHANN gibt im Brief an L'HOSPITAL vom 15.X.1697 (*BJS*, S. 354/55) eine Variante. — JAKOB fügt hinzu, die gesuchte Kurve hänge von einer Differentialgleichung der Form $y' = py + qy^n$ ab. Dies dürfte auf einer Täuschung beruhen.

334 JAKOB konstruiert aus einer Verhältnisgleichung, die auf folgendes hinauskommt: Trifft der Bogen OP auf einer Kurve der Schar die Sehne OP unter einem bestimmten Winkel, dann wird die gesuchte Kurve von jener Halbierenden des Winkels bei P berührt, die nicht in das Segment OP eindringt. CRAMER (*BKC*, S. 804) beweist die Verhältnisgleichung JAKOBS durch eine Überlegung, die jener von vorhin ähnelt. Der Sachverhalt ist jedoch auch ohne Rechnung klar: Ist OQ der zu OP aus O ähnliche Bogen auf einer Nachbarkurve der Schar und gleich dem Bogen OPΠ auf der Ausgangskurve, dann ist bis auf Glieder 2. Ordnung PQ = PΠ. — JOHANNS Lösung im Brief an L'HOSPITAL vom 15.X.1697 (*BJS*, S. 354) ist eine Variante der soeben angedeuteten rein geometrischen Überlegung. JAKOB fügt ein weiteres Ergebnis an ähnlichen Bögen zu, das mit Flächeninhalten zusammenhängt.

335 Lassen wir etwa die aus O ähnlich gelegenen Kurvenbögen auf der X-Achse beginnen und eine gegebene Gerade g schneiden, dann sieht JAKOBS Konstruktion so aus: Er greift irgendeine Kurve der Schar heraus; ihr Anfangspunkt auf der X-Achse sei A. Dann schneidet er die in A beginnende Evolvente dieser Kurve mit der Parallelen h zu g durch O in C, bestimmt den Berührpunkt B der aus C an die Kurve möglichen Tangente und schneidet OB mit g in B*. Der Bogen A* B* der Schar zwischen g und der X-Achse, so sagt er, ist der gesuchte. CRAMER gibt in *BKC*, S. 792 einen analytischen Beweis, in *BKC*, S. 805 einen infinitesimalgeometrischen.

336 Brief an JOHANN vom 18.XI.1697 (*BJS*, S. 360/61).

337 LEIBNIZ an JOHANN, Brief vom 27.XII.1697 (*LMG* III, S. 475).

338 *BKC*, S. 797/801.

339 Nachlass, Stück 6 = *BKC*, S. 1023/25.

340 *Sur quelques questions de maximis et minimis*, *HMP* 1733, Pariser Ausgabe, S. 186/94.

341 Nachlass, Stück 7 = *BKC*, S. 1025/26. Hier verwendet JAKOB den Umstand, dass die geodätischen Linien des Kegels bei dessen Ausbreitung in die Ebene zu Geraden werden.

342 Nachlass, Stück 8 = *BKC*, S. 1028/29.

343 *AE* X 1698 (*BJC* I, S. 263/66).

344 Diese Kennzeichnung (die durch drei konsekutive Kurvenpunkte bestimmte Schmiegungsebene der Kurve enthält die Flächennormale) ist im Brief JOHANNS an LEIBNIZ vom 26.VIII.1698 (*LMG* III, S. 532) angedeutet. In einer Mitteilung an S. KLINGENSTIERNA aus dem Jahr 1728 (*BJC* IV, S. 108/28) wird eine sehr interessante Allgemeindarstellung mit vielen Erläuterungsbeispielen gegeben.

345 Hiervon handeln die Artikel 243/45 der *Med.* Der umfangreiche Art. 245 ist im Nachlass als Stück 11 (*BKC*, S. 1036/48) gedruckt.

346 Art. 247 der *Med.* ist die Vorarbeit für die beiden Akademie-Abhandlungen von 1703 (*BKC*, S. 930/46). Art. 248 ist die Vorarbeit für die Akademie-Abhandlung von 1704 (*BKC*, S. 947/53).

347 Art. 250 der *Med.* enthält die Vorarbeiten für die Akademie-Abhandlung von 1705 (*BKC*, S. 976/89). Die Ergänzung in Art. 251 (Nachlass, Stück 9 = *BKC*, S. 1030/32) bezieht sich auf die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich die einzelnen Teile eines ursprünglich gespannten und dann freigegebenen elastischen Bandes wieder strecken. Die abschliessende Ansicht JAKOBS über die Biegung eines ausgedehnten elastischen Bandes weicht von der in Art. 250 gegebenen ab. Sie findet sich in Art. 280.

348 Basel 1698 = *BKC*, S. 849/67.

349 Übernommen aus den *AE* IV 1691 [129] und VI 1691 [107].

350 *AE* VI 1691 [113].

351 Die zugehörigen Rechnungen erscheinen erst in den *AE* II 1699 (*BKC*, S. 868/70). Der Beweis steht in Art. 267 der *Med.*

352 Es handelt sich um Beispiele für Differentialgleichungen, in denen die Differentiale einer einzigen Veränderlichen auftreten. Modern geschrieben: $ay'' = y'^2$ bezw. $2yy'' = y'^2$.

353 D. GREGORY hatte in den *PT 19*, Nr. 231 für VIII 1697, S. 637/52 (mit Wiederdruck in den *AE* VII 1698, S. 305-31) eine Herleitung der Kettenlinie gegeben, von der JAKOB sagt: Das Ergebnis ist nur deshalb richtig, weil sich zwei grundsätzliche Fehler aufheben. LEIBNIZ liess eine anonyme Widerlegung in den *AE* II 1699 (*LMG* V, S. 336/39) erscheinen, auf die GREGORY in den *AE* VII 1700, S. 301/06 mit einer einsichtslosen Entgegnung reagierte. Unter diesen Umständen unterliess LEIBNIZ die Fortsetzung der aussichtslosen Diskussion. Im Zusammenhang mit GREGORYS Ausführungen ergab sich jedoch ein neues anregendes Problem: Wie müssen die Steine eines gewölbten Tores behauen werden, damit dieses ohne Mörtelverbindung in sich selber festhält ? Dass der Torbogen nach Art der Kettenlinie gewölbt werden müsse, behauptet JAKOB in Art. 285 der *Med.* (Nachlass, Stück 29 = *BKC*, S. 1119/23). Nach CRAMERS Feststellung (*BKC*, S. 1120) ist seine Schlussweise nicht fehlerfrei. Laut Eintrag im MS. hat JAKOB diese Untersuchung am 5.X.1704 ausgeführt, als es ihm gesundheitlich schon sehr schlecht ging.

354 *BJC* I, S. 322/27 (lateinisch) = *HMP* 1699 (französisch).

355 Aus dem laufenden Punkt P (x, t) des Kreises $t^2 = 2ax - x^2$ mit der Bogenlänge $OP = s = a\int_0^x dx : t$ ist der laufende Punkt Q $(x, s + t)$ der Zykloide bestimmt. JOHANN beweist, dass das Zykloidensegment zwischen den Punkten Q_1Q_2 elementar quadrierbar ist, falls $x_1 + x_2 = a$ ist. Dabei darf Q_2 auch durch seinen Spiegelpunkt $\overline{Q_2}$ an der X-Achse ersetzt werden. Entsprechend zeigt er, dass die Fläche zwischen dem Zykloidenbogen OQ und den Verbindungsstrecken des Punktes R $(a - x, 0)$ mit O und Q quadriert werden kann. Schliesslich deutet er an, auch die Zykloidenzone zwischen der X-Achse, dem Bogen Q_1Q_2 und den zugehörigen Ordinaten lasse sich algebraisch quadrieren, falls das Verhältnis der Bögen OQ_1 und Q_1Q_2 ganzzahlig ausgedrückt werden könne. JOHANN verweist bei dieser Gelegenheit auch auf die Zykloidenquadraturen von HUYGENS ($x_1 = x_2 = a : 2$) im *Horologium oscillatorium* (Paris 1673 = *HO* XVIII, Buch III, *prop.* 7) und von LEIBNIZ ($x_1 = 0$, $x_2 = a$) in Nr. 18 des *JS* vom 23.V.1678 (*LMG* V, S. 116/17), die sich aus seiner eigenen als Spezielfälle ergäben.

356 Das folgt aus der Erwähnung im Brief an LEIBNIZ vom 22.IX.1696 (*LMG* III, S. 327).

357 Wahrscheinlich war beiläufig erwähnt worden, dass JOHANN Neues über quadrierbare Zykloidensegmente in Aussicht stelle.

358 *BKC*, S. 871/73.

359 *BJC* I, S. 330/35.

360 *BKC*, S. 892/94. Die Einzelausführung ist enthalten in Art. 264 *bis* der *Med.* (Nachlass, Stück 31 = *BKC*, S. 1129/34). Ein dort auftretender Rechenfehler ist belanglos.

361 *BJC* I, S. 386/89. Anschliessend folgt (S. 389/91) die Anwendung auf das Zykloidenproblem.

362 JOHANN verweist auf die Mitteilung an L'HOSPITAL (vom 22.I.1701 = *BJS*, S. 371/73), woselbst die Reihe (A) durch schrittweises Vorgehen an Hand geometrischer Überlegungen für ganzes n bewiesen wird. Anscheinend wusste er nicht, dass sein Verfahren genau dem Vorgehen VIÈTES in *Theor.* 7 der nachgelassenen *Sectiones angulares* entspricht, die wir in der von A. ANDERSON besorgten Ausgabe kennen (Paris 1615 = *Opera* [21], S. 296/97). Der Unterschied liegt einzig darin, dass sich VIÈTE mit der Aufstellung des Koeffizientenschemas begnügt, während JOHANN auch den allgemeinen Ausdruck für das Ergebnis hinschreibt. Die Ausdehnung auf unganze n wird von JOHANN nicht etwa erwiesen, sondern nur formal erschlossen. Echten Anspruch kann JOHANN wohl auf die Reihen (B) erheben. Auf sie wird im Brief an L'HOSPITAL nur kurz verwiesen. Die Herleitung findet sich in einer Beilage zum Brief an LEIBNIZ vom 10.VI.1702 (*LMG* III, S. 699/701).

363 *BJC* I, S. 391/92.

364 *BKC*, S. 921/29. Die Abhandlung war Beilage zu einem Schreiben vom 13.VII.1702 (vermutlich an VARIGNON). Im Grunde ist die vorgenommene Entwicklung eine Variante des in Art. 178 der *Med.* [128] eingeschlagenen Verfahrens.

365 JAKOB kannte diese Arbeit aus dem MS. Sie wurde erst in den *AE* VIII 1703, S. 345/51 gedruckt.

366 *Opera* II [124], S. 384. Es handelt sich um die Stelle aus dem ersten Brief NEWTONS an OLDENBURG für LEIBNIZ über die höhere Analysis vom 23.VI.1676 (*LMG* I, S. 107). NEWTON bezeichnet den Kreisdurchmesser mit d und die dem Peripheriewinkel α

gegenüberliegende Sehne mit $x = d \,.\, \sin\alpha$, die dem Peripheriewinkel $n\alpha$ gegenüberliegende Sehne mit $y = d \cdot \sin n\alpha$. Er drückt y aus x aus wie folgt:

$$nx + \frac{1 - nn}{2 \times 3\, dd} xx\mathrm{A} + \frac{9 - nn}{4 \times 5\, dd} xx\mathrm{B} + \cdots .$$

Dabei ist A das vorhergehende Glied nx, B das vorhergehende Glied $\frac{1 - nn}{2 \times 3\, dd} xx\mathrm{A}$ usw. Er bemerkt, dass die Reihe für ungerade n endlich bleibt und alsdann in die aus der gewöhnlichen Algebra entnehmbare Formel übergeht.

Überraschenderweise sagt JAKOB nichts davon, dass schon A. DE MOIVRE in den *PT 20*, Nr. 240 vom V 1698, S. 190/93 einen interessanten Beweis für die NEWTONsche Formel gegeben hatte. Dieser Beweis beruht auf dem Ansatz in unbestimmten Koeffizienten, angewendet auf die aus $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = n \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ folgenden Reihenentwicklungen (um Verwechslungen zu vermeiden, ist NEWTONS d durch a ersetzt). Wir würden nach zweimaliger Differentiation auf die noch zweckmässigere Form reduzieren $(a^2 - x^2)\, y'' - xy' + n^2 y = 0$. Jetzt führt der Ansatz $y = \sum b_k x^k$ auf $b_{k+2} = \frac{(k^2 - n^2)\, b_k}{(k+1)(k+2)\, a^2}$. Vielleicht war dies der Weg, auf dem NEWTON selbst zum Ziel gekommen ist; die Form des Ergebnisses legt das nahe. Unwahrscheinlich ist, dass JAKOB die MOIVRESche Abhandlung nicht gekannt hat; denn wir finden in Art. 265 der *Med.* eine Studie über die vorhergehende Arbeit MOIVRES in den *PT 19*, Nr. 230 vom VII 1697, S. 619/25, worin $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k\right)^m$ unter Verwendung eines Ansatzes in unbestimmten Koeffizienten ausgerechnet wird.

In dieser Aufzeichnung (Nachlass, Stück 1 = *BKC*, S. 993/98) verwendet JAKOB drei verschiedene Methoden zur Herstellung der MOIVRESchen Ergebnisse. Die erste beruht auf Koeffizientenvergleich, nachdem beiderseits logarithmisch differenziert wurde (nicht im Druck); die zweite stützt sich auf den polynomischen Lehrsatz, den JAKOB in Teil II, Kap. VIII der *Ars conjectandi* von 1713, S. 132 in vorbildlicher Kürze behandelt hatte. JAKOB verweist ausdrücklich auf diese Stelle. Auch die dritte Methode hängt mit der logarithmischen Differentiation zusammen, angewendet auf die etwas allgemeinere Reihe $\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right]^m$.

367 JAKOB war über LEIBNIZ verärgert, weil er (irrtümlich) annahm, dieser stelle sich in der Angelegenheit mit den isoperimetrischen Problemen grundsätzlich auf die Seite JOHANNS. Er überschätzte den Einfluss LEIBNIZens auf MENCKE und glaubte, das in den *AE* übliche Verfahren, polemische Bemerkungen zu unterdrücken oder wenigstens abzuschwächen, sei einseitig gegen ihn angewendet worden, um ihn zu benachteiligen. Über dieses Verfahren beklagt er sich heftig im Brief an N. FATIO vom 2.X.1700 (MS). Dieser hebt im Brief vom 22.III.1701 (MS) die Verdienste NEWTONS um die Erfindung der höheren Analysis besonders hervor. Dort wird auch auf den vollen Wortlaut der beiden Briefe NEWTONS über die höhere Analysis in J. WALLIS, *Opera* III 124, 1699 hingewiesen, aus dem hervorgehe, dass NEWTON seine Methoden bereits entdeckt hatte, als LEIBNIZ noch unwissender Anfänger war. Ob JAKOB diesen WALLIS-Band eingesehen hat, wissen wir nicht. Es gibt keine Stelle, aus der sich mit Sicherheit ein Zitat aus diesem Werk entnehmen lässt. Hypochondrisch veranlagt, wie er nun einmal war, fühlte sich JAKOB von LEIBNIZ zurückgesetzt. Er brach deshalb den an sich nur losen Briefwechsel mit LEIBNIZ ab, indem er dessen Brief vom 25.III.1697 (*LMG* III, S. 56/62) unbeantwortet liess. Erst als er zu seiner völligen Überraschung auf LEIBNIZens Veranlassung hin am 11.VII.1701 in die Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde und das Diplom mit einem Begleitschreiben des Akademie-Sekretärs J. Th. JABLONSKI vom 26.IX.1702 (*LMG* III, S. 62) erhielt, knüpfte er den Briefwechsel durch das Schreiben vom 15.XI.1702 (*LMG* III, S. 62/66) wieder an.

368 Art. 258 der *Med.* (Nachlass, Stück 22 = *BKC*, S. 1088/97), Art. 259 (Nachlass, Stück 23 = *BKC*, S. 1098/99) und Art. 260 (Nachlass, Stück 24 = *BKC*, S. 1099-1100). In Art. 258 mahnt JAKOB zunächst (*BKC*, S. 1088) zur Vorsicht bei Vernachlässigung infinitesimaler Glieder höherer Ordnung (vgl. *Th.* 7 der *Epimetra* zur 5. Reihendissertation vom 8.IV.1704 = *BKC*, S. 975). Dann folgt die hübsche Bemerkung (*BKC*, S. 1091), in einem Extrempunkt sei die Kurvenkrümmung besonders einfach bestimmbar, weil dort $y' = 0$ ist. Art. 266 (Nachlass, Stück 25 = *BKC*, S. 1101/05) bezieht sich

auf die Bestimmung des Krümmungsradius bei Fadenkurven. Das MS. trägt das Datum 1701. Von fremder Hand ist vermerkt, die Abhandlung sei niedergeschrieben worden, nachdem JAKOB das MS. eines HERMANNschen Aufsatzes zum nämlichen Thema gesehen habe, der erst in den *AE* XI 1702, S. 501/04 zum Abdruck kam.

369 *BKC*, S. 888/91.

370 *BJC* I, S. 381/86. Hier bemerkt JOHANN, falls eine Kurve durch eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ gegeben sei, lasse sich ρ am zweckmässigsten aus der Form $\sqrt{1 + y'^2}^3 : y''$ bestimmen. Noch etwas weiter geht HERMANN, der in einer Studie für LEIBNIZ (Beilage zum Brief vom 15.X.1704 = *LMG* III, S. 261/63) die Ausgangsgleichung $M(x, y)\,dx = N(x, y)\,dy$ zugrundelegt.

371 Von diesem Gegenstand, dessen sich LEIBNIZ schon gegen Ende der Pariser Zeit bemächtigt hatte (vgl. LEIBNIZ an JAKOB, April 1703 = *LMG* III, S. 67), handeln die Aufsätze in den *AE* V 1702 (*LMG* V, S. 350/61, Zerlegung in Partialbrüche mit nur einfach zählenden Nennern) und I 1703 (*LMG* V, S. 361/66, Auftreten mehrfach zählender Nennerfaktoren). Zur nämlichen Frage war JOHANN unabhängig von LEIBNIZ gelangt. Er hatte bei der kritischen Durchsicht der Arbeit JAKOBS in den *AE* II 1699 [351] über die loxodromische Skala bemerkt, dass man zur Ermittlung von $\int \frac{a^2\,dx}{a^2 - x^2}$ nicht der bis dahin von den Brüdern benutzten umständlichen Transformation $x = a \cdot \frac{b^2 - t^2}{b^2 + t^2}$ bedarf, sondern zweckmässiger $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x}\right]$ verwendet. Am 10.VI.1702 (*LMG* III, S. 702) behauptete er bereits, das Integral über eine rationale Funktion könne keine anderen transzendenten Bestandteile als Kreisbögen und Logarithmen enthalten. Am 5.VIII.1702 sandte er ein diesbezügliches MS. nach Paris, wo es in der *HMP* 1702 (*BJC* I, S. 393/400, lateinischer Auszug in den *AE* I 1703) abgedruckt wurde.

LEIBNIZ hielt die Behauptung JOHANNS für unrichtig und glaubte, Integrale wie $\int \frac{dx}{a^4 + x^4}$ könnten weder durch Kreisbögen noch durch Logarithmen dargestellt werden (*LMG* V, S. 359/61). JOHANN gab jedoch später die Zerlegung $a^4 + x^4 = (a^2 + x^2)^2 - 2a^2x^2 \equiv \left(a^2 + x^2 + ax\sqrt{2}\right)\left(a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}\right)$ an, vermittels deren die behauptete Darstellung auch in diesem Falle bestätigt werden konnte: *AE* VI 1719 (*BJC* II, S. 403/04). JAKOB, der von LEIBNIZ am 3.XII.1703 (*LMG* III, S. 79/80) auf das Integral hingewiesen worden war, durchschaute den Sachverhalt nicht, sondern trat in der Antwort vom 20.IV.1704 (*LMG* III, S. 86/87) der unrichtigen Meinung LEIBNIZens bei.

372 JAKOB deutet am 2.VIII.1704 (*LMG* III, S. 90/91) an, er besitze ein Verfahren, um $\int uv^{p-1}\,dx$ (p gebrochen) auf eine Normalform zu reduzieren, falls u ein Polynom m-ten und v ein Polynom n-ten Grades in x sei ($m > n$) und sich aus v kein Faktor $(p - 1)$-ten Grades abspalten lasse. LEIBNIZ versteht zunächst nicht, um was es sich handelt (Antwort vom 28.XI.1704 = *LMG* III, S. 93/94) und erhält hierauf am 28.II.1705 (*LMG* III, S. 97) ein Erläuterungsbeispiel.

Aus diesem geht hervor, dass JAKOB an einen Ansatz der Form $\int uv^{p-1}\,dx = Uv^p + \int Vv^{p-1}\,dx$ (U, V Polynome in x) in unbestimmten Koeffizienten denkt. Er behauptet, dass der Grad von V kleiner als $n - 1$ gemacht werden kann. Die Einzelheiten gehen aus den Aufzeichnungen in Art. 261/64 und 276 hervor (Nachlass, Stück 3 = *BKC*, S. 1007/17). Eine frühere Studie dieser Art findet sich in Art. 220. Sie ist im Anschluss an Art. 219 [214] entstanden und bringt hübsche Einzelsätze über elementar ausdrückbare irrationale Integrale, dringt jedoch noch nicht zu allgemeineren Gesichtspunkten vor.

Jetzt weiss LEIBNIZ, was JAKOB meint. Er sendet diesem eine ältere Aufzeichnung (*LMG* III, S. 104/08) als Beilage zum Brief vom April 1705 (*LMG* III, S. 98/103). Wir kennen noch einen andern Entwurf dieser Art (*LMG* V, S. 366/77), der jedoch als zu umfänglich nicht übersendet wurde. LEIBNIZ verwendet im Grunde JAKOBS Verfahren, erweitert es jedoch, indem er $u(x)$ nicht mehr als Polynom, sondern als beliebige rationale Funktion von x ansieht.

Als LEIBNIZ dieses MS. niederschrieb, kannte er wohl bereits NEWTONS *Tractatus de quadratura curvarum* (*Opera* [154] I), der als Anhang zur *Optik* (London 1704) gedruckt ist. Das dortige Verfahren, stark verwandt mit dem Vorgehen JAKOBS und LEIBNIZens, stammt im wesentlichen aus der erst 1736 zum Druck gekommenen *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Erstdruck nach dem lateinischen Original *Opera* I, S. 389/518),

Kap. 10 (etwa S. 483/87). Die LEIBNIZsche Darstellungsweise ist umfassender und durchsichtiger als die der beiden Partner.

373 Schon im Brief vom April 1703 (*LMG* III, S. 71) erkundigt sich LEIBNIZ nach der Spieltheorie JAKOBS, von deren Existenz er einmal gehört habe. Am 3.X.1703 (*LMG* III, S. 77/78) berichtet JAKOB über das vor langen Jahren begonnene Buch, dem nur mehr die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf das bürgerliche Leben fehle. Dann folgt ein Hinweis auf das Haupttheorem, das Gesetz der grossen Zahlen, wonach mit der Anzahl der Beobachtungen auch die Sicherheit der Ergebnisse wächst. Gegen diesen Gedanken wendet sich LEIBNIZ in mehreren Briefen und lässt sich von JAKOB nicht überzeugen.

374 Basel 1704 = *BKC*, S. 955/75.

375 *Prop.* 53 bezieht sich auf Art. 174 der *Med.* [124], *prop.* 56 auf Art. 175 [125], *prop.* 58 auf Art. 217 [170], *prop.* 59 auf Art. 177 [127] und 150 [97] und *prop.* 60 auf Art. 170 [117].

376 JAKOB gibt die Reihe für $(1 + n)^p$ mit dem Bemerken, sie sei den Geometern allgemein bekannt, und unterdrückt den Beweis, „um nicht zu ausführlich werden zu müssen". Das Interpolationsverfahren und die Erhebung zu einer unbestimmten Potenz, sagt er, lassen sich auf die nämliche Grundlage stützen.

377 Jedoch ohne Hinweis auf die LEIBNIZsche Abhandlung in den *AE* IV 1693 [242].

378 Hier wird zwar nicht LEIBNIZ zitiert, wohl aber dessen vorhin erwähnte Abhandlung in den *AE* IV 1693. Dazu tritt das in Art. 177 der *Med.* [127] angedeutete Verfahren durch Grenzübergang aus der binomischen Entwicklung, jetzt allerdings wesentlich verbessert und beinahe im modernen Sinne streng durchgeführt.

379 Erwähnt sei etwa (*prop.* 53 = *BKC*, S. 960) der Nachweis dafür, dass $p_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \frac{2n-1}{2n}$ mit $n \to \infty$ gegen Null strebt. JAKOB betrachtet nebenher auch $q_{2n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \frac{2n}{2n+1}$ und stellt durch gliedweisen Vergleich der Faktoren fest, dass $p_{2n} < q_{2n}$. Wäre nun $\lim\limits_{n \to \infty} p_{2n} > 0$, so auch $\lim\limits_{n \to \infty} q_{2n} > 0$. Es ist aber $p_{2n} q_{2n} = \frac{1}{2n+1}$, also $\lim\limits_{n \to \infty} p_{2n} q_{2n} = 0$ und folglich auch $\lim\limits_{n \to \infty} p_{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} q_{2n} = 0$.

380 JAKOB denkt hier nicht an unsere Tafeln, sondern an die damals üblichen, bei denen Sinus und Tangens als Streckenverhältnisse mit dem Nenner 10^{10} aufgefasst werden. Deshalb fügt er hinzu: $lg \sin \varphi$ bezw. $lg \operatorname{tg} \varphi = 0$, falls $\operatorname{arc} \varphi = 10^{-10}$, also φ im Gradmass $= 4 \cdot 60^{-5} + 27 \cdot 60^{-6}$. Für noch kleinere Winkel sind die fraglichen Logarithmen negativ.

381 In *BKC*, S. 974 wird darauf hingewiesen, dass JAKOB an die Unbestimmtheit für $\frac{dy}{dx}$ in einem singulären Punkt der aus $F(x, y) = 0$ gekennzeichneten Kurve gedacht haben könnte, falls $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

382 Das wissen wir aus dem Brief JAKOBS an LEIBNIZ vom 2.VIII.1704 (*LMG* III, S. 91/92). LEIBNIZ sah die neue Reihe als bedeutsam an, konnte aber die Umrechnung nicht nacherfinden: Brief an HERMANN vom 24.XI.1704 (*LMG* IV, S. 265) und an JAKOB vom 28.XI.1704 (*LMG* III, S. 94).

383 Brief an LEIBNIZ vom 21.I.1705 (*LMG* IV, S. 267/68).

384 Brief an LEIBNIZ vom 28.II.1705 (*LMG* III, S. 96).

385 Brief an HERMANN vom 7.IV.1705 (*LMG* IV, S. 271/72) und an JAKOB vom April 1705 (*LMG* III, S. 103).

386 EULERS Methode wird erstmals entwickelt in der Abhandlung *De seriebus divergentibus* (in der Berliner Akademie gelesen am 27.X.1746, der Petersburger Akademie vorgelegt am 12.III.1753, gedruckt in den *Novi commentarii ac. sc. Petrop.* 5, 1754/55, S. 205/37, ausgegeben 1760 = *Opera* I, 14, Leipzig 1924, S. 585/617) und ist von hier übergegangen in die *Institutiones calculi differentialis*, Petersburg 1755 = *Opera* I, 10, Leipzig 1913, Teil 2, Kap. 1. EULER geht, um es kurz modern zu sagen, von einer alternierenden Potenzreihe $y = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 + \ldots$ aus. Er setzt $x = t : (1 - t)$ und entwickelt nach Potenzen von t:

$$y = a_1 t + (a_1 - a_2) t^2 + (a_1 - 2a_2 + a_3) t^3 + \cdots .$$

Indem er sich das Koeffizientenschema der a_k angeschrieben denkt, kann er $a_1 - a_2 = \Delta a_1$, $a_1 - 2a_2 + a_3 = \Delta^2 a_1$ usw. setzen. Sein Vorgehen ist rein formaler Natur. Mit $x = 1$, $t = 1 : 2$ erhält er

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \cdots = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} \Delta a_1 + \frac{1}{2^3} \Delta^2 a_1 + \cdots .$$

Sein Verfahren führt auf eine Konvergenzverstärkung, falls die Glieder a_k der alternierenden Reihe unbeschränkt abnehmen.

Es kann sein, dass EULER von HERMANN, neben dem er 1727/31 in Petersburg wirkte und mit dem ihn auch verwandtschaftliche Bande verknüpften, eine Anregung für seine Untersuchungen empfangen hat.

[387] Art. 269 der *Med.* handelt von der Schwerpunktsbewegung zweier Körper, die gleichförmig bewegt werden, Art. 270 von der Schwerpunktsbewegung beim Zusammenstoss zweier vollkommen unelastischer bezw. elastischer Körper, Art. 271 von der dabei statthabenden Erhaltung der lebendigen Kraft. Art. 272 (Nachlass, Stück 9 = *BKC*, S. 1031/32) ergänzt das in Art. 251 [347] Gesagte. Art. 277 bezieht sich auf die Ruhelage einer beschwerten Rolle, die an einem in den Endpunkten festgehaltenen Faden hängt. Art. 278 handelt von der Ruhelage einer Schnur, die über zwei feste Rollen A und B gelegt ist und einerseits von zwei gleichgrossen Gewichten a und b an den Schnurenden, andererseits von einem an loser Rolle zwischen A und B hängenden Gewicht C ($< a + b$) gespannt wird.

Art. 281 enthält eine Studie über die Zentralbewegung. Unter der Annahme, dass y als die unabhängige Veränderliche gilt, wird aus einer Infinitesimalbetrachtung die Proportionalität zwischen der Zentripetalbeschleunigung und $\sqrt{x^2 + y^2}\,\frac{d^2 x}{d y^2}$ festgestellt. Als Erläuterungsbeispiel dient die Rechnung an der Ellipse. Daraus ermittelt JAKOB bei gegebener Zentripetalbeschleunigung unter Mitverwendung des Flächensatzes die zugehörige Kurvengleichung. Veranlasst ist diese Untersuchung durch das in NEWTONS *Philosophiae naturalis principia mathematica* [154], Buch I, Abschnitt VIII, *prop.* 40 Gesagte. Später haben sich HERMANN (Brief an JOHANN vom 12.VII.1710 = *BJC* I, S. 469/70) und JOHANN (Antwort vom 7.X.1710 = *BJC* I, S. 470/80) mit dem nämlichen Problem befasst.

Schliesslich bestimmt JAKOB in Art. 286 (Nachlass, Stück 30 = *BKC*, S. 1124/28), der vom 12.XII.1704 datierten letzten Aufzeichnung der *Med.*, die Wirkungslinie und den Gesamtimpuls von unendlich vielen Stössen (in einer Ebene), die aus verschiedenen Richtungen auf einen starren Bogen in dieser Ebene ausgeübt werden.

[388] Art. 273 (Nachlass, Stück 26 = *BKC*, S. 1105/08) handelt vom Spannungszentrum. Art. 280 gibt JAKOBS abschliessende Ansicht über die Biegung eines ausgedehnten elastischen Bandes wieder. Auf ihn stützt sich die Akademie-Abhandlung von 1705 (*BKC*, S. 976/89). Eine interessante Anwendung findet sich in Art. 282 (Nachlass, Stück 28 = *BKC*, S. 1115/18): Eine Uhrfeder soll so auf einen Conus aufgewickelt werden, dass die Spannkraft der Feder für die Uhrbewegung immer gleich gross bleibt. Welche Form hat der Conus ?

[389] Art. 274 handelt von der Stelle, an der uns auf der Erde der Planet Mars im hellsten Licht erscheint. Art. 275 bezieht sich auf ein Problem von J. K. EISENSCHMIDT: Einem gegebenen Vieleck ein anderes so umzubeschreiben, dass entsprechende Seiten parallel sind und die Abstände zusammengehöriger paralleler Seiten zu den äusseren Seiten in gegebenem Verhältnis stehen. In Art. 283 (datiert 1.XI.1704) wird eine von Ph. NAUDÉ stammende bewegungsgeometrische Aufgabe gelöst, die auf eine Kurve 4. Ordnung führt. Art. 284 (datiert: 28.XI.1704) befasst sich mit einem von J. Chr. FATIO stammenden Problem über Kreisbögen, das vermittels der Sinus-Linie gelöst wird.