Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS
Autor: Braconnier, Jean
Kapitel: § 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32889

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

b) On dit qu'un groupe localement compact est *élémentaire* s'il est isomorphe à un groupe de la forme $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^p \times \mathbf{Z}^q \times F$ où F est un groupe abélien fini; alors G contient un sous-groupe ouvert H, *limite projective* de groupes élémentaires; autrement dit, il existe dans H une base de filtre $\mathfrak{P}$ qui converge vers e, qui est formée de sous-groupes compacts et telle que H/N soit un groupe élémentaire pour tout $N \in \mathfrak{P}$ [1].

§ 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.

1. La théorie des idéaux de l'algèbre $L^1(G)$ présente de grandes difficultés et elle est encore assez peu avancée (même pour $G = \mathbf{R}$) sauf dans le cas des groupes *compacts*. Elle se fait essentiellement au moyen de la représentation de $L^1(G)$, au moyen de la transformation de FOURIER, sur la sous-algèbre $\mathfrak{A}(\hat{G})$ de $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$.

Soit H une partie de $L^1(G)$; on appelle *cospectre* de H et on désigne par Cosp (H) l'ensemble des caractères $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que $\hat{f}(\hat{x}) = 0$ pour toute $f \in H$. Cosp (H) est un ensemble fermé de $\hat{G}$, égal au cospectre de l'idéal fermé de $L^1(G)$ engendré par H. On remarquera que l'intérieur du cospectre de $f \in L^1(G)$ est simplement le complémentaire du support de $\hat{f}$.

Soit maintenant A′ une partie de $\hat{G}$ et Z (A′) l'ensemble des fonctions de $L^1(G)$ dont les transformées de FOURIER s'annulent dans A′, c'est-à-dire dont le cospectre contient A′. Z (A′) est un idéal fermé de $L^1(G)$ et on a $Z(A') = Z(\overline{A'})$, $\overline{A'}$ étant l'adhérence de A′. De plus, pour tout ensemble *fermé* A′ de $\hat{G}$, on a Cosp (Z (A′)) = A′; cela tient essentiellement au fait que, pour tout compact K′ de $\hat{G}$ et tout voisinage U′ de K′ dans $\hat{G}$, on peut trouver une fonction $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ égale 1 dans

[1] Pour de plus amples détails sur la théorie de la dualité et la structure des groupes abéliens, cf. J. BRACONNIER, Sur les groupes topologiques localement compacts. *Journal Math. pures et appl.*, 27, 1-85 (1948).

K′ et s'annule dans $\complement$U′; on résume souvent cette propriété en disant que $L^1(G)$ est une algèbre *régulière* (cf. [11, 13]).

A cette propriété se rattache la suivante: *soit* K′ *un ensemble compact de* $\hat{G}$ *et* f *une fonction de* $L^1(G)$; si le cospectre de f ne rencontre pas K′, il existe une fonction $g \in L^1(G)$ telle que $\hat{g}(\hat{x}) = 1/\hat{f}(\hat{x})$ si $\hat{x} \in K'$ (résultat dû à N. Wiener pour $G = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Z}$ [34] et à R. Godement [13] pour G quelconque); plus généralement, *si* h *est une fonction holomorphe dans* $K' \cap \hat{f}(\hat{G})$, *il existe une fonction* $g \in L^1(G)$ *telle que* $\hat{g}(\hat{x}) = h(\hat{f}(\hat{x}))$ *pour tout* $\hat{x} \in K'$; ce résultat, dû à T. Carleman [6] pour $G = \mathbf{R}$ a été démontré par I. Segal [20], puis par H. J. Reiter [27] pour G quelconque. Il peut s'interpréter comme une propriété de clôture de l'algèbre normée, non complète, $\mathfrak{A}(\hat{G})$.

2. On a déjà remarqué que *tout idéal régulier maximal de* $L^1(G)$ *est de la forme* $Z(\hat{x})$ où $\hat{x}$ est un caractère de G; de plus $L^1(G)$ *est semi-simple*, puisque séparée par ses caractères (§ 3, n° 1).

Tout idéal fermé I *de* $L^1(G)$, *distinct de* $L^1(G)$, *est contenu dans un idéal régulier maximal au moins.* Autrement dit, pour qu'un idéal fermé I de $L^1(G)$ soit égal à $L^1(G)$, il faut et il suffit que, pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, il existe $f \in I$ telle que $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$; en particulier, *pour que l'ensemble des translatées de* $f \in L^1(G)$ *soit total dans* $L^1(G)$, *il faut et il suffit que* $\hat{f}$ *ne s'annule en aucun point de* $\hat{G}$. On a là une des formes du célèbre *théorème taubérien de* Wiener (la démonstration pour $G = \mathbf{R}$ est due à N. Wiener [34] et, pour G quelconque à R. Godement [13]; cf. aussi [30]. On en déduit une autre forme du théorème taubérien, qui est la suivante: supposons que G ne soit pas compact et que f soit une fonction de $L^1(G)$ telle que $\hat{f}$ ne s'annule pas; si g est une fonction de $L^\infty(G)$ telle que $f \star g$ s'annule à l'infini, alors $h \star g$ s'annule à l'infini pour toute fonction $h \in L^1(G)$ (il suffit de voir que l'ensemble des $h \in L^1(G)$ ayant la propriété indiquée est un idéal fermé de $L^1(G)$ contenant f, donc égal à $L^1(G)$ d'après la première forme du théorème taubérien).

3. Pour tout idéal fermé I de $L^1(G)$, on a $I \subset Z(\mathrm{Cosp}(I))$; mais il existe en général des idéaux fermés I pour lesquels I est

distinct de Z (Cosp (I)): c'est par exemple ce qui se passe si $G = \mathbf{R}^n$, avec $n \geqslant 3$ [1]. Il est intéressant de connaître des conditions suffisantes pour qu'une fonction $f \in Z$ (Cosp (I)) appartienne à I: le théorème taubérien peut, par exemple, s'exprimer en disant que l'on a $I = Z$ (Cosp (I)) si Cosp (I) est vide. Une des conditions les plus simples est la suivante, qui généralise le théorème taubérien: *si* $\hat{f}$ *est une fonction de* $L^1(G)$ *telle que le support de* $\hat{f}$ *ne rencontre pas le cospectre de l'idéal fermé* I *de* $L^1(G)$, *alors* f *appartient à* I [30] (cela signifie que toute fonction de Z (Cosp (I)) appartient « localement » à I). Ce résultat suffit déjà pour faire la théorie des idéaux de $L^1(G)$ lorsque G est *compact*: $\hat{G}$ est alors discret et on voit alors immédiatement que $I \to$ Cosp (I) *est une application biunivoque et décroissante de l'ensemble des idéaux fermés de* $L^1(G)$ *sur* $\mathfrak{P}(\hat{G})$, *application dont la réciproque est* Z; autrement dit, tout idéal fermé de l'algèbre d'un groupe compact G est formé des fonctions de $L^1(G)$ dont les transformées de FOURIER s'annulent sur une partie bien déterminée de $\hat{G}$.

Si I est un idéal fermé de $L^1(G)$ et si $f \in Z$ (Cosp (I)), on voit facilement que le support de f rencontre Cosp (I) suivant un ensemble contenu dans la frontière de Cosp (I) (donc rare); *si, de plus, cet ensemble est clairsemé* (i.e. ne contient aucun ensemble parfait qui ne soit déjà vide), *alors* $f \in I$. Ce résultat, qui généralise visiblement tous les précédents, est dû à S. AGMON et S. MANDELBROJT [22] si $G = \mathbf{R}$ et à H. HELSON [15] et H. J. REITER [27] pour G quelconque.

La démonstration utilise essentiellement une technique de DITKIN [2] et le fait suivant: il existe dans G une base de filtre $\Psi(G)$ dont les ensembles sont formés de fonctions f intégrables, positives, de type positif et telles que $\int f(x)\,dx = 1$ et que le support de $\hat{f}$ soit compact, base de filtre suivant laquelle $f \to \hat{f}(\hat{x})$ converge vers 1 pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$; suivant cette base de filtre, $f \to f \star g$ converge vers g (resp. 0) dans $L^1(G)$ pour toute $g \in L^1(G)$. (resp. telle que

---

[1] Cf. L. SCHWARTZ, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227, 424-426 (1948) et Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions, *Can. Journ. of Math.*, 3, 503-512 (1951).

[2] Cf. V. DITKIN, On the structure of ideals in certain normed rings. *Ucenye Zapiski Moskov, Gos. Univ. Mat.*, 30, 83-130 (1939).

$\int g(x)\,dx = 0$); en particulier, on voit que les fonctions à support compact forment dans $\mathfrak{A}(\hat{G})$ un idéal partout dense [13].

En particulier, *si* I *est un idéal fermé de* $L^1(G)$ *tel que la frontière de* Cosp (I) *soit clairsemée* (par exemple si Cosp (I) est discret), *on a* $I = Z(\text{Cosp}(I))$. Remarquons que dire que Cosp (I) se réduit à un point $\hat{x} \in \hat{G}$ revient à dire que l'idéal fermé I est contenu dans le seul idéal maximal $Z(\hat{x})$ (i.e. que I est primaire); le résultat précédent montre qu'on a alors $I = Z(\hat{x})$, c'est-à-dire que I est maximal. Ce résultat avait déjà été prouvé par I. Segal [30] pour $G = \mathbf{R}$ et par J. Riss [28] et I. Kaplansky [17] pour G quelconque. Remarquons encore que, si I est un idéal fermé de $L^1(G)$ dont le cospectre est fini, $I = Z(\text{Cosp}(I))$ est de codimension finie égale au nombre d'éléments de Cosp (I); plus généralement, si Cosp (I) est discret, on peut donner des précisions supplémentaires sur la structure de l'algèbre quotient $L^1(G)/I$ [27].

4. Soit maintenant H une partie de $L^\infty(G)$; on désigne par J (H) le sous-espace faiblement fermé de $L^\infty(G)$ invariant par les translations de G et engendré par H, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $L^\infty(G)$ que l'on peut approcher faiblement dans $L^\infty(G)$ par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H. On appelle *spectre* de H l'ensemble fermé $Sp(H) = \hat{G} \cap J(H)$ de $\hat{G}$. On dit que H est *moyenne périodique* si J (H) est distinct de $L^\infty(G)$. L'idéal fermé I de $L^1(G)$ constitué par les fonctions orthogonales aux fonctions de J (H) est évidemment aussi formé des fonctions $f \in L^1(G)$ telles que $\tilde{f} \star g = 0$ pour toute fonction $g \in H$; pour que H soit moyenne périodique, il faut et il suffit que $I \neq 0$; de plus *le spectre de* H *est le cospectre de* I. On peut ainsi associer à chacun des résultats ci-dessus une proposition de théorie spectrale qui apparaîtra le plus souvent comme un théorème d'approximation dans $L^\infty(G)$.

Tout d'abord, si A′ est une partie fermée de $\hat{G}$, elle est égale à son spectre et l'idéal orthogonal à J (A′) est Z (A′). D'autre part, si $g \in \mathfrak{L}^1(G)$, le spectre de g est celui qu'on a déjà défini au n° 3 du paragraphe 4, c'est-à-dire le support de la mesure de $\mathfrak{M}^1(\hat{G})$ dont g est la transformée de Fourier; enfin, il est

clair que, si g est intégrable et bornée dans G, le spectre de G est le support de $\hat{g}$.

Le théorème taubérien de WIENER signifie que, si $H \subset L^\infty(G)$ est telle que J (H) ne soit pas réduit à 0, le spectre de H n'est pas vide (théorème de BEURLING [1]). En général, J (H) contient évidemment J (S*p* (H)), mais ces deux espaces sont distincts. Toutefois, si U′ est un voisinage de S*p* (H) dans G, on a $H \subset J(U')$, c'est-à-dire qu'*on peut approcher faiblement dans* $L^\infty(G)$, *et même uniformément sur tout compact, toute fonction de* H *par des polynomes trigonométriques formés avec les éléments de* U′. Dans le cas où G est *compact*, on voit ainsi que J (H) = J (S*p* (H)) pour toute partie H de $L^\infty(G)$. Plus généralement, si la frontière de S*p* (H) est clairsemée (par exemple si S*p* (H) est discret), on a $H \subset J(Sp(H))$. Si S*p* (H) est *discret*, on peut alors associer à chaque fonction de H un développement formel canonique suivant S*p* (H); si de plus $f \in H$ est uniformément continue, f est *presque périodique* [27]; la théorie des fonctions presque périodiques permet d'ailleurs de préciser de nombreuses propriétés spectrales [27], mais il n'existe pas à l'heure actuelle d'étude systématique des rapports qui existent entre la théorie spectrale et la théorie ergodique. Il est permis de croire qu'on pourra encore préciser considérablement les critères indiqués ci-dessus pour qu'un idéal I de $L^1(G)$ soit égal à Z (Cosp (I)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING, A., Un théorème sur les fonctions bornées et uniformément continues sur l'axe réel. *Acta Mathematica*, t. LXXVII (1945), pp. 127-136.

[2] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft (1932).

[3] BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Livre III, Topologie générale (fasc. de résultats). *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1196, Paris (1953).

[4] —— Ibid., Livre V, Espaces vectoriels topologiques. *Actual. Scient. et Ind.*, n°s 1189 et 1229, Paris (1953-1955).

[5] —— Ibid., Livre VI, Intégration. *Actual. Scient. et Ind.*, n° 1175, Paris (1952).

[6] CARLEMAN, T., *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Uppsala (1944).