Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS
Autor: Braconnier, Jean
Kapitel: § 2. L'intégrale de Haar et le produit de composition.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32889

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de la transformation de FOURIER $x \to \hat{x}$ lorsque A est une algèbre de groupe.

Pour de plus amples renseignements sur la théorie des algèbres normées, on pourra consulter le magistral exposé de M. NEUMARK [23] et aussi [8, 11, 14].

§ 2. L'intégrale de Haar et le produit de composition.

Dans tout ce qui suit, on désignera par G *un groupe topologique localement compact*; la loi de composition de G sera notée multiplicativement et l'élément neutre de G sera désigné par e. Toutes les fonctions définies dans G que l'on considère prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes, sauf mention expresse du contraire.

1. Soit f une fonction définie dans G; si $s \in$ G, la fonction $x \to f(s^{-1}x)$ s'appelle la *translatée* (à gauche) de f par s et se note $U_s \cdot f$; les éléments $s \in$ G tels que $U_s \cdot f = f$ s'appellent les *périodes* de f et forment un sous-groupe de G, fermé si f est continue; le support de $U_s \cdot f$ est l'image du support de f par $x \to sx$. Il en résulte que U_s est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{K}$ (G), ce qui permet de faire opérer G dans l'espace des mesures dans G: si $s \in$ G est si μ est une mesure dans G, on désigne par $U_s \cdot \mu$ la mesure ν définie par $\nu(f) = \int f(sx)\, d\mu(x)$, que l'on appelle la *translatée* (à gauche) de μ par s. On montre qu'*il existe une mesure sur* G, *positive et non nulle, invariante par toutes les translations (à gauche)*; cette mesure est, en outre, *unique* à un facteur multiplicatif près et s'appelle la *mesure de* HAAR dans G. On choisit une fois pour toutes cette mesure et on désigne alors par $\int f(x)\, dx$ sa valeur pour $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}$ (G); on a ainsi $\int f(sx)\, dx = \int f(x)\, dx$ et $\int f(xs^{-1})\, dx = \rho(s) \int f(x)\, dx$ pour tout $s \in$ G, où ρ est une représentation continue de G dans le groupe multiplicatif des nombres réels > 0, égale à 1 si G est *abélien* ou *compact*. Le support de la mesure de HAAR est G tout entier et on identifiera toujours deux fonctions définies dans G qui sont égales presque partout pour la mesure de HAAR; si deux fonctions continues dans G sont égales presque partout, elles sont égales.

Si p est un nombre réel $\geqslant 1$, on désignera par $L^p(G)$ l'espace des fonctions de $p^{ième}$ *puissance intégrable* dans G pour la mesure de HAAR; cette mesure se prolonge en une forme linéaire dans $L^1(G)$ et on désigne par $\int f(x)\,dx$ la valeur de ce prolongement pour $f \in L^1(G)$; $L^p(G)$ est un espace de BANACH pour la norme $N_p(f) = (\int |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$. Si $p > 1$, le dual de $L^p(G)$ est $L^q(G)$ avec $1/p + 1/q = 1$: toute forme linéaire continue dans $L^p(G)$ s'écrit en effet sous la forme

$$<f, g> = \int f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \tag{1}$$

où $f \in L^p(G)$ et $g \in L^q(G)$. En particulier, $L^2(G)$ est un espace hilbertien si on le munit du produit scalaire défini par (1). Le dual de $L^1(G)$ est l'espace $L^\infty(G)$ des fonctions *mesurables* dans G et bornées en mesure de HAAR: toute forme linéaire continue dans $L^1(G)$ est encore donnée par la formule (1) avec $f \in L^1(G)$ et $g \in L^\infty(G)$; $N_\infty(g)$ désignera la borne supérieure en mesure de HAAR d'une fonction $g \in L^\infty(G)$; on définit alors facilement la topologie *faible* dans $L^\infty(G)$, qui sera largement utilisée dans la suite.

Si $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et si $f \in L^p(G)$, on a $U_s \cdot f \in L^p(G)$ et $N_p\, U(_s \cdot f) = N_p(f)$. Il en résulte que $s \to U_s$ est une représentation biunivoque de G dans le groupe des automorphismes de $L^p(G)$ et, si $f \in L^p(G)$, $s \to U_s \cdot f$ est une application continue de G dans $L^p(G)$. Si p est fini, le transposé de l'automorphisme U_s de $L^p(G)$ est l'automorphisme $U_{s^{-1}}$ de $L^q(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Enfin, par extension de la définition donnée ci-dessus, les éléments s de G tels que $U_s \cdot f = f$ s'appellent les *périodes* de la fonction $f \in L^p(G)$ et forment un sous-groupe fermé de G.

Si $f \in L^1(G)$, on désignera par $\tilde{f}$ la fonction $x \to \overline{f(x^{-1})}/\rho(x)$ de $L^1(G)$; de plus on identifiera souvent f à la mesure μ bornée dans G, définie par $d\mu(x) = f(x)\,dx$; on a $N_1(f) = \|\mu\|$. Plus généralement, si μ est une mesure dans G, on désignera par $\tilde{\mu}$ la mesure définie par $d\tilde{\mu}(x) = d\overline{\mu}(x^{-1})$ où μ est la mesure conjuguée de μ; cette convention est évidemment compatible avec la précédente.

Pour que G soit compact, il faut et il suffit que la mesure de HAAR de G soit une mesure bornée; on choisit alors cette mesure

de façon que sa norme soit 1; pour toute fonction f continue dans G, $\int f(x)\,dx$ est alors la valeur moyenne de f dans G.

Si G est *discret*, la mesure de HAAR de G est évidemment définie par une masse constante, qu'on choisit le plus souvent égale à 1, placée en chaque point de G; $L^1(G)$ est alors l'ensemble des fonctions f telles que la famille de terme général $f(x)$ soit *sommable* et on a $\int f(x)\,dx = \sum_x f(x)$. On a d'ailleurs $L^1(G) = \mathfrak{M}^1(G)$.

La mesure de HAAR sur le groupe $\mathbf{R}^n$ est la mesure de LEBESGUE usuelle. D'autre part, à toute fonction f continue sur le groupe compact $\mathbf{T}$ des nombres réels modulo 1 correspond une fonction f^* définie sur $\mathbf{R}$ et de période 1; l'intégrale de HAAR sur $\mathbf{T}$ est alors définie par $\int f(x)\,dx = \int_0^1 f^*(t)\,dt$.

Soit enfin H un sous-groupe distingué et fermé de G et $g \to \int_H g(y)\,dy$ (resp. $h \to \int_{G/H} h(\dot{x})\,d\dot{x}$) la mesure de HAAR de H (resp. G/H); si $f \in L^1(G)$, $\dot{f}(\dot{x}) = \int_H f(xy)\,dy$ ne dépend que de la classe $\dot{x}$ dans G/H de $x \in G$ et $\dot{f}$ est une fonction intégrable dans G/H; on peut choisir (et on fera toujours ce choix) la mesure de HAAR dans G/H de façon que $\int f(x)\,dx = \int_{G/H} \dot{f}(\dot{x})\,d\dot{x}$ pour toute $f \in L^1(G)$ · $f \to \dot{f}$ est alors une représentation continue de $L^1(G)$ sur $L^1(G/H)$, dont le noyau K (H) est formé des fonctions orthogonales aux fonctions de $g \in L^\infty(G)$ telles que $g(xy^{-1}) = g(x)$ pour tout $y \in H$ [1].

2. Soient μ et ν deux mesures bornées dans G; la formule

$$\lambda(f) = \int f(xy)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \qquad (f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(G) \tag{1}$$

définit une mesure bornée λ dans G qu'on appelle le *produit de composition* de μ et ν et qu'on désigne par $\mu \star \nu$. On a $\|\mu \star \nu\| \leqslant \|\mu\|\,\|\nu\|$. Muni du produit de composition et de l'involution $\mu \to \tilde{\mu}$, l'espace de BANACH $\mathfrak{M}^1(G)$ est une *algèbre normée involutive*. Remarquons maintenant que $L^1(G)$, identifié comme on l'a vu à une partie de $\mathfrak{M}^1(G)$, est un *idéal* (bilatère) fermé de $\mathfrak{M}^1(G)$, le produit de composition de $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ et de

---

[1] Cf. [33, 27] et aussi H. REITER, *Monatshefte für Math.*, *58*, 73-78 (1954), et les rectifications à cet article.

$f \in L^1(G)$ étant la fonction intégrable dans G définie presque partout par $\mu \star f(x) = \int f(y^{-1}x)\, d\mu(y)$; on peut en particulier définir le produit de composition de deux fonctions f et g de $L^1(G)$ par la formule

$$f \star g(x) = \int f(y)\, g(y^{-1}x)\, dy\,. \tag{2}$$

Plus généralement on appellera *produit de composition* de deux fonctions f et g définies dans G la fonction $f \star g$ définie par (2) lorsque cette formule a un sens. On appelle *algèbre du groupe* G l'algèbre involutive normée et complète $L^1(G)$. Si f et g appartiennent à $\mathcal{K}(G)$, il en est de même de $f \star g$, de sorte que $\mathcal{K}(G)$ est une sous-algèbre partout dense de $L^1(G)$, que certains auteurs appellent encore algèbre de G ($\mathcal{K}(G)$ est, si l'on veut, l'« algèbre étroite » du groupe G). Remarquons encore que l'ensemble $\mathfrak{M}_c(G)$ des mesures sur G, dont le support est compact, est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}^1(G)$. Pour que l'une des algèbres que l'on vient de définir soit commutative, il faut et il suffit que G soit *abélien*; pour que $L^1(G)$ ou $\mathcal{K}(G)$ possède un élément unité (qui est alors ε_e) il faut et il suffit que G soit *discret*. Remarquons enfin que, si H est un sous-groupe distingué fermé de G, $f \to \dot{f}$ est une représentation de l'algèbre involutive $L^1(G)$ sur $L^1(G/H)$.

Le produit de composition $\mu \star f$ garde un sens si $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ et $f \in L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ et on a alors $\mu \star f \in L^p(G)$ et $N_p(\mu \star f) \leqslant \|\mu\| N_p(f)$. En particulier, on a $N_p(f \star g) \leqslant N_1(f) N_p(g)$ si $f \in L^1(G)$ et $g \in L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$; on voit ainsi que $g \to f \star g$ est un endomorphisme continu de $L^p(G)$ et que l'application qui à $f \in L^1(G)$ associe cet endomorphisme est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre $L^1(G)$ dans l'algèbre des endomorphismes continus de $L^p(G)$; le transposé de l'endomorphisme $g \to f \star g$ de $L^p(G)$ est l'endomorphisme $g \to \tilde{f} \star g$ de $L^q(G)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Enfin $L^p(G) \cap L^1(G)$ est un idéal à gauche partout dense de $L^1(G)$. D'autre part, pour qu'un sous-espace fermé de $L^p(G)$ soit stable par toutes les translations U_s $(s \in G)$, il faut et il suffit qu'il soit stable par tous les endomorphismes $g \to f \star g$ $(f \in L^1(G))$; en particulier, *les idéaux à gauche fermés de* $L^1(G)$ *sont identiques aux sous-espaces fermés de* $L^1(G)$, *stables par toutes les translations.*

Lorsque U parcourt l'ensemble des voisinages compacts de e dans G, l'ensemble des fonctions positives de $\mathcal{K}(G)$, dont le support est contenu dans U et dont l'intégrale de HAAR est 1, décrit une base de filtre $\Phi(G)$ dans $\mathcal{K}(G)$. Pour toute fonction $g \in L^p(G)$, l'application $f \to f \star g$ de $\mathcal{K}(G)$ dans $L^p(G)$ a g comme limite suivant la base de filtre $\Phi(G)$ *(principe de régularisation)*. En particulier, $\Phi(G)$ est une *approximation de l'unité* dans $L^1(G)$. De même, si g est une fonction continue dans G, $f \star g$ converge uniformément sur tout compact de G vers g suivant la base de filtre $\Phi(G)$ [1].

Lorsque le groupe G est *compact*, on a $L^p(G) \subset L^1(G)$ et $N_1(f) \leqslant N_p(f)$ si $p \geqslant 1$ et $f \in L^p(G)$; en particulier $L^2(G)$ est un idéal bilatère de $L^1(G)$ et on a $N_2(f \star g) \leqslant N_2(f)\, N_2(g)$. $L^2(G)$, muni du produit de composition et de l'involution $f \to \tilde{f}$, devient une algèbre normée involutive, dont la structure est liée à la structure d'espace hilbertien de $L^2(G)$ par la formule $<f \star g, h> = <g, \tilde{f} \star h>$. C'est cette algèbre qui permet d'ailleurs d'étudier le plus facilement les groupes compacts.

3. On dit qu'une fonction φ continue dans G est de *type positif* si elle vérifie les inégalités

$$\sum_{i,j} c_j \overline{c_i}\, \varphi(x_j^{-1} x_i) \geqslant 0 \tag{3}$$

quels que soient les nombres complexes c_i et les éléments x_i de G $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On désigne par $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des fonctions continues de type positif. Toute fonction $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ est uniformément continue et bornée dans G et satisfait à $\|\varphi\| = \varphi(e)$ et $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$. Il sera commode de considérer $\mathcal{P}(G)$ comme une partie de $L^\infty(G)$; $\mathcal{P}(G)$ est d'ailleurs un cône convexe fermé de $L^\infty(G)$. De plus, le produit de deux fonctions de type positif est encore une fonction de type positif. Si μ est la mesure discrète définie par les masses c_i aux points x_i de G $(1 \leqslant i \leqslant n)$, l'inégalité (3) s'écrit sous la forme

$$\tilde{\mu} \star \mu(\varphi) \geqslant 0. \tag{4}$$

---

[1] Cf. [12]. On remplace souvent, dans la pratique, $\Phi(G)$ par une base de filtre plus fine, dont les ensembles sont constitués par des fonctions ayant des propriétés données, formant souvent un idéal de $\mathcal{K}(G)$.

On vérifie facilement que pour qu'une fonction continue φ soit de type positif, il faut et il suffit qu'elle vérifie (4) pour toute mesure à support compact, ou pour toute mesure μ de la forme $d\mu(x) = f\,dx$ $(f \in \mathcal{K}(G))$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\int \tilde{f} \star f(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx \geqslant 0 \tag{5}$$

si $f \in \mathcal{K}(G)$; on a alors aussi (5) pour toute $f \in L^1(G)$ (l'inégalité (5) signifie que la forme sesquilinéaire $(f, g) \to \int \tilde{g} \star f(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx$ est hermitienne et positive; nous reviendrons sur ce point au paragraphe 8). Toute fonction $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ définit au moyen de la formule $P(f) = \langle f, \varphi \rangle$ une forme *linéaire* P *positive et continue* dans l'algèbre $L^1(G)$. Réciproquemment, toute fonction de $L^\infty(G)$ qui définit une forme positive dans $L^1(G)$ est presque partout égale à une fonction de $\mathcal{P}(G)$ à laquelle on l'identifie. Ceci reste évidemment exact si on substitue à l'algèbre $L^1(G)$ l'algèbre $\mathcal{K}(G)$. On dira de même qu'une mesure μ sur G est de *type positif* si on a $\int \tilde{f} \star f(x)\, d\mu(x) \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{K}(G)$; μ est ainsi une forme linéaire positive (mais non continue) sur l'algèbre $\mathcal{K}(G)$.

On désignera par $\mathcal{V}(G)$ l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires de fonctions de $\mathcal{P}(G)$; $\mathcal{V}(G)$ est une algèbre normée (mais non complète) avec le produit usuel des fonctions et la norme $N_\infty(\varphi) = \|\varphi\|$. On désignera par $\mathcal{V}^p(G)$ le sous-espace $L^p(G) \cap \mathcal{V}(G)$ de $L^p(G)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$; $\mathcal{V}^1(G)$ est contenu dans tous les $\mathcal{V}^p(G)$.

Si $f \in L^1(G)$, $\tilde{f} \star f$ appartient à $\mathcal{P}(G)$; il en résulte que les fonctions $\tilde{g} \star f$ (g et f étant dans $L^1(G)$) appartiennent à $\mathcal{V}^1(G)$. Ces fonctions forment un idéal partout dense de $L^1(G)$. Plus généralement les fonctions $\tilde{g} \star f$ sont partout denses dans $L^p(G)$, de telle sorte que $\mathcal{V}^1(G)$ et $\mathcal{V}^p(G)$ sont partout denses dans $L^p(G)$. Il n'est peut-être pas inutile de signaler que les fonctions de type positif vont jouer un rôle considérable dans notre propos.

Pour tout ce qui est dit dans ce paragraphe, et pour de plus amples informations, le lecteur se reportera au traité de A. Weil [33] (cf. aussi [12]).