

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1956)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ANALYTIQUES ET SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Choquet, Gustave  
**Kapitel:** Théorème de monodromie.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32888>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Démonstration.* — Soit  $I = [\alpha, \beta[$  ou  $[\alpha, \beta]$  l'intervalle sur lequel est définie la courbe  $z(t)$  de  $C$ ; on suppose que  $z(\alpha) = z_0$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathfrak{C}$  telles que  $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = g_0$ , et soit  $T$  l'ensemble des points  $t \in I$  tels que  $f_1(t) = f_2(t)$ . Cet ensemble  $T$  est fermé relativement à  $I$ . D'autre part, si  $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ ,  $T$  est ouvert puisque l'application  $\varphi$  est localement une homéomorphie. Donc  $T$  est ouvert et fermé relativement à  $I$ ; comme  $T$  n'est pas vide ( $\alpha \in T$ ) et comme  $I$  est connexe, on a  $I = T$ . Autrement dit,  $f_1 = f_2$ .

*Corollaire.* — Soit  $\gamma$  une courbe paramétrée de  $C$  et d'origine  $z_0$ , définie par  $z = z(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ).

Si  $\gamma$  n'est pas le support d'une courbe de  $\mathfrak{C}$  d'origine  $g_0$ , il existe un point  $\tau$  de  $[\alpha, \beta]$  tel que la courbe  $z = z(t)$  ( $t \in [\alpha, \tau]$ ) soit le support d'une courbe de  $\mathfrak{C}$  d'origine  $g_0$ , mais qu'il n'en soit pas de même de la courbe  $z = z(t)$  ( $t \in [\alpha, \tau]$ ).

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le champ analytique  $\mathfrak{C}$  est prolongeable à partir de  $g_0$  sur  $\gamma$  jusqu'au point  $(\tau, z(\tau))$  exclus, mais pas au-delà. On dit parfois aussi que  $g_0$  et la courbe  $z = z(t)$  ( $t \in [\alpha, \tau[$ ) définissent un *point singulier* du champ  $\mathfrak{C}$ .

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si  $\rho(g)$  désigne le rayon de la rondelle maximale de centre  $g$ ,  $\rho(g(t)) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \tau$  (où  $g(t)$  est le point de  $\mathfrak{C}$  associé à  $z(t)$ ).

### THÉORÈME DE MONODROMIE.

On va énoncer ce théorème classique sous une forme en apparence moins générale, afin d'éviter le recours à la notion d'homotopie. L'énoncé général se déduirait du nôtre assez aisément, en utilisant des propriétés simples de l'homotopie.

*Théorème 4:* Soit  $\mathfrak{C}$  un champ analytique; soit  $\omega$  un ouvert de  $C$  homéomorphe à un disque ouvert plan, et soit  $g_0$  un point de  $\mathfrak{C}$  de support  $z_0 \in \omega$ .

Si toute courbe paramétrée  $z(t)$  ( $t \in I$ ) de  $\omega$  et d'origine  $z_0$  est le support d'une courbe  $f(t)$  ( $t \in I$ ) de  $\mathfrak{C}$  et d'origine  $g_0$ , la réunion  $\Omega$  des images  $f(I)$  de ces courbes est un ouvert de  $\mathfrak{C}$  qui recouvre  $\omega$  une seule fois.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant, de nature purement topologique:

*Lemme:* Soit  $E$  un espace topologique quelconque et soit  $\varphi$  une application de  $E$  dans un espace séparé  $F$ . Soit  $K$  un compact de  $E$ . Si  $\varphi$  est continue en tout point de  $K$ , si la restriction de  $\varphi$  à  $K$  est biunivoque, et si  $\varphi$  est biunivoque au voisinage de tout point de  $K$ ,  $\varphi$  est biunivoque au voisinage de  $K$ .<sup>1</sup>

*Démonstration.* — Soit  $\psi$  l'application  $(\varphi, \varphi)$  de  $E^2$  dans  $F^2$ . Désignons par  $\delta_E$  et  $\delta_F$  les diagonales de  $E^2$  et  $F^2$ . Les hypothèses se traduisent de la façon suivante:

- (1)  $F$  séparé  $\iff \delta_F$  est fermé dans  $F^2$ ;
- (2)  $K$  compact  $\iff K^2$  compact;
- (3)  $\varphi$  continue en tout point de  $K \iff \psi$  continue en tout point de  $K^2$ ;
- (4) restriction de  $\varphi$  à  $K$  biunivoque  $\iff \psi(K^2 - \delta_E) \subset \mathbb{C}_{\delta_F}$ ;
- (5) biunivocité locale de  $\varphi$  en tout point de  $K \iff \delta_E \cap K^2$  a un voisinage  $V$  tel que  $\psi(V - \delta_E) \subset \mathbb{C}_{\delta_F}$ .

Des conclusions (1), (3), (4) résulte que  $\psi^{-1}(\mathbb{C}_{\delta_F})$  est un voisinage de  $(K^2 - \delta_E)$ ; en rapprochant ce résultat de (5), on voit que  $K^2$  possède un voisinage  $W$  tel qu'en tout point  $(x, y) \in W - \delta_E$  on ait  $\psi(x, y) \notin \delta_F$ .

Or d'après (2),  $K^2$  est compact, donc il existe un voisinage  $U$  de  $K$  tel que  $U^2 \subset W$ .

Autrement dit, pour tout couple  $(x, y)$  de points distincts de  $U$ , on a  $(\varphi(x), \varphi(y)) \notin \delta_F$ , c'est-à-dire  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

*Démonstration du théorème 4.* — Par hypothèse, on a  $\varphi(\Omega) = \omega$ .

D'autre part, du fait que la restriction de  $\varphi$  à toute rondelle de  $\mathcal{C}$  est une homéomorphie avec un disque ouvert de  $C$  résulte que  $\Omega$  est un ensemble ouvert.

Il nous reste à montrer que la restriction de  $\varphi$  à  $\Omega$  est biunivoque (ce sera donc aussi une homéomorphie).

---

<sup>1</sup> On dit qu'une application  $\varphi$  de  $E$  est biunivoque au voisinage d'un ensemble  $A$  de  $E$  si la restriction de  $\varphi$  à un voisinage de  $A$  est biunivoque.

Pour simplifier les notations, supposons que  $\omega$  soit un disque ouvert de centre  $z_0$  et de rayon 1. Le cas général se ramène immédiatement à celui-ci par homéomorphie.

Pour tout point  $z$  de  $\omega$  distinct de  $z_0$ , le segment  $(z_0, z)$  définit la courbe  $\gamma$ :  $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ); celle-ci est d'après l'hypothèse la projection d'un arc de  $\mathfrak{A}$  d'équation  $f_z(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) avec  $f_z(0) = g_0$ . Posons  $f_z(1) = g(z)$ ; on a par construction  $\varphi(g(z)) = z$ .

D'après le théorème 3, la fonction  $g(z)$  est bien définie. Nous allons montrer que  $g(z)$  est *continue*.

L'ensemble  $f_z([0, 1])$  est un compact  $K$  de  $\mathfrak{A}$  tel que la restriction de  $\varphi$  à  $K$  soit biunivoque, puisque la courbe  $\gamma$  n'a pas de point double.

D'après le lemme précédent,  $K$  possède un voisinage  $U$  ouvert tel que la restriction  $\varphi_U$  de  $\varphi$  à  $U$  soit biunivoque, donc soit une homéomorphie. L'ensemble  $V = \varphi(U)$  est un voisinage du segment  $(z_0, z)$ ; or  $V$  contient tout segment  $(z_0, z')$  où  $z'$  est un point assez voisin de  $z$ , donc  $U$  contient aussi tous les points  $g(z')$  correspondants.

Autrement dit  $g = \varphi_U^{-1}$  au voisinage de  $z$ ; donc  $g$  est continue.

A toute courbe paramétrée  $z(t)$  de  $\omega$  et d'origine  $z_0$  correspond la courbe  $g(z(t))$  de  $g(\omega)$  dont la projection sur  $C$  est identique à la courbe  $z(t)$ .

Donc l'ensemble  $\Omega$  cherché n'est autre que  $g(\omega)$ . Par construction, cet ensemble recouvre  $\omega$  une seule fois; comme  $g$  est biunivoque et que  $g^{-1} = \varphi_{g(\omega)}$ ,  $g(\omega)$  est un ouvert de  $\mathfrak{A}$  homéomorphe à  $\omega$ .

### *Morceau de champ analytique.*

DÉFINITION 9: On appelle *morceau de champ analytique* tout ouvert connexe non vide  $\mathfrak{M}$  de l'espace  $G$  des germes analytiques.

Il est immédiat qu'un morceau de champ analytique  $\mathfrak{M}$  appartient à un champ analytique  $\mathfrak{A}$  et à un seul, dont il constitue une partie ouverte.

Il est important de savoir reconnaître si un morceau de champ analytique  $\mathfrak{M}$  est un champ.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment que  $\mathfrak{M}$  soit fermé dans  $G$ . Nous allons traduire cette condition de façon plus commode:

*Théorème 5.* — Pour qu'un morceau de champ analytique  $\mathfrak{M}$  soit un champ, il faut et il suffit que, pour tout point  $g \in \mathfrak{M}$ , toute rondelle  $\Delta$  de centre  $g$  et de rayon fini soit contenue dans  $\mathfrak{M}$ .

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la réalisée. Soit  $g$  un élément de  $G$ , limite de germes  $g_n$  de  $\mathfrak{M}$ .

Dès que  $g_n$  est assez voisin de  $g$ , il existe une rondelle de centre  $g_n$  et contenant  $g$ ; donc on a  $g \in G$ . Autrement dit,  $\mathfrak{M}$  est fermé dans  $G$ ; c'est donc bien un champ.

*Corollaire 1.* — Si un morceau de champ analytique  $\mathfrak{M}$  a pour support  $C$  et recouvre  $C$  une seule fois,  $\mathfrak{M}$  est un champ.

En effet, pour tout  $g \in \mathfrak{M}$  et tout  $\rho > 0$ , la rondelle  $\Delta(g, \rho)$  est alors contenue dans  $\mathfrak{M}$ .

On appelle un tel champ un *champ entier* ou plus simplement une fonction entière.

*Corollaire 2.* — Tout morceau de champ  $M$  qui contient un ouvert qui recouvre  $C$  une seule fois est identique à cet ouvert et est un champ entier.

### *Inverse d'un germe et inverse d'un champ.*

Soient  $v = f(u)$  et  $u = g(z)$  deux fonctions holomorphes, l'une  $g$  au voisinage d'un point  $z_0$ , l'autre  $f$  au voisinage du point  $u_0 = g(z_0)$ . La fonction  $h(z) = f(g(z))$  est holomorphe au voisinage de  $z_0$ .

Si  $f(g(z)) \equiv z$  au voisinage de ce point, on a  $f'(u_0) g'(z_0) = 1$ , donc  $f'(u_0)$  et  $g'(z_0)$  ne sont pas nuls.

Inversement, si  $g(z)$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $z_0$ , avec  $g'(z_0) \neq 0$ , on sait qu'il existe une fonction  $f(u)$  et une seule holomorphe au voisinage de  $u_0 = g(z_0)$ , et telle que  $f(g(z)) \equiv z$  au voisinage de  $z_0$ .

Evidemment  $f(u_0) = z_0$ ; la fonction  $g(f(u))$  est donc définie au voisinage de  $u_0$ ; et on a  $g(f(u)) = u$  au voisinage de  $u_0$ .

Ces remarques montrent qu'à tout germe  $g = (z_0; a_0, a_1, \dots)$  tel que  $a_1 \neq 0$ , on peut associer un germe et un seul:

$$f = (a_0; z_0, 1/a_1, b_2, \dots) \text{ tel que } f \circ g = (z_0; z_0, 1, 0, 0, \dots)^1.$$

On note  $f = g^{-1}$  et on l'appelle *germe inverse* de  $g$ . Ce qui précède montre que  $(g^{-1})^{-1} = g$ .

Désignons par  $G^*$  l'ensemble des germes inversibles. L'application  $\Phi$  de  $G^*$  sur  $G^*$  définie par  $g \rightarrow g^{-1}$  est biunivoque et a pour carré l'identité.

C'est en outre une homéomorphie. Pour le voir, il suffit de vérifier que  $\Phi$  est continue.

Or ceci résulte de ce que, avec les notations du début de ce paragraphe, si  $f(u)$  et  $g(z)$  sont deux fonctions localement inverses au voisinage de  $z_0$  et  $u_0$ , le germe  $(z, A)$  où  $A$  est la suite  $(f(z), \dots, \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \dots)$  a pour inverse le germe  $(u, B)$  où  $u = f(z)$  et où  $B$  est la suite  $(g(u), \dots, \frac{g^{(n)}(u)}{n!}, \dots)$ .

Si  $\mathfrak{A}$  est un champ de  $G$  qui ne soit pas une fonction constante, et si on pose  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \cap G^*$ , l'ensemble  $(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^*)$  est fermé et discret (donc aussi dénombrable).

L'ensemble  $\Phi(\mathfrak{A}^*)$  est ouvert et connexe, donc appartient à un champ que l'on notera  $\mathcal{B}$ .

On a  $\Phi(\mathfrak{A}^*) \subset \mathcal{B}^*$ ; mais aussi  $\Phi(\mathcal{B}^*) \subset \mathfrak{A}^*$  d'où  $\mathcal{B}^* \subset \Phi(\mathfrak{A}^*)$ , donc  $\mathcal{B}^* = \Phi(\mathfrak{A}^*)$ .

Aussi appellerons-nous  $\mathcal{B}$  le champ inverse de  $\mathfrak{A}$  et le noterons-nous  $\mathfrak{A}^{-1}$ .

Nous venons de voir que, mis à part deux sous-ensembles dénombrables fermés et discrets, les champs  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}^{-1}$  sont homéomorphes dans l'homéomorphie  $\Phi$ .

Pour éliminer les ensembles dénombrables exceptionnels, il faudrait modifier la définition des germes, en considérant comme germe tout développement (non uniforme) tel que  $\left( \sum_0^\infty a_n z^{\frac{n}{p}} \right)$  où  $p$  est un entier  $> 0$ .

En fait, pour avoir une théorie entièrement satisfaisante, il faudrait aussi remplacer le plan  $C$  par le plan  $\hat{C}$  déduit de  $C$

---

<sup>1</sup> Le germe  $f \circ g$  se définit de façon évidente d'après ce qui précède.

par l'addition d'un point à l'infini (ce qu'on appelle aussi la sphère de Riemann).

*Exemple.* — Soit  $\mathfrak{A}$  le champ « entier » défini par la fonction entière  $e^z$ . La fonction  $e^z$  n'a sa dérivée nulle en aucun point, donc  $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ . D'autre part,  $e^z$  n'a pas de point critique (non étudié ci-dessus), donc on aura  $(\mathfrak{A}^{-1})^* = \mathfrak{A}^{-1}$ . On aura donc  $\mathfrak{A}^{-1} = \Phi(\mathfrak{A})$ .

En particulier  $\mathfrak{A}^{-1}$  sera homéomorphe à  $\mathfrak{A}$ , donc aussi au plan C.

Le champ inverse de celui de  $e^z$  s'appelle logarithme et on note la fonction analytique de ce champ:  $\log(g)$ .

De la propriété  $e^{z+i\pi} = e^z$  résulte que l'homéomorphie  $g \rightarrow g'$  de G sur lui-même définie comme suit:

$$g' = (z; a_0 + 2i\pi, a_1, \dots) \text{ si } g = (z; a_0, a_1, \dots)$$

est une automorphie de  $\mathfrak{A}^{-1}$ .