Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

Kapitel: XI. Quelques observations sur le théorème A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

$$n > \frac{lg \frac{lg \Psi(x)}{lg\, x}}{lg\, k} - 1,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg \Psi(x)}{lg\, x}\right)^{-\frac{\varepsilon}{lg\, k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, x}{lg \Psi(x)}\right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq k\, e^{\varepsilon}\, x^{k}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{(lg \Psi(x))^{\delta}}. \qquad (X, 10)$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x:

$$\delta\, lg\, lg \Psi(x) > (k+1)\, lg x, \quad (lg \Psi(x))^{\delta} > x^{k+1}.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leqq k\, e^{\varepsilon}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^{x}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{e^{x}}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{(lg\, x)^2}}.$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) *Soient* $\Psi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions positives, continues et dérivables pour* $0 < x_0 \leqq x < \infty$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \longrightarrow \infty, \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$

et que $\Psi'(x)$ et $\psi'(x)$ *soient positifs et sommables dans tout sous-intervalle fini de* $\langle x_0, \infty)$. *Soit* $f(x)$ *positif pour* $x \geqq x_0$ *et sommable dans tout sous-intervalle fini de* $\langle x_0, \infty)$. *Supposons, qu'il existe un* $q\ (0 < q < 1)$ *tel que l'on ait*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq q\, f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0)\,. \tag{XI, 1}$$

Alors on a ou bien pour tout $x \geqq x_0$: $\Psi(x) > \psi(x)$, *ou bien à partir d'un* x: $\Psi(x) < \psi(x)$, *suivant que l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \tag{XI, 2}$$

est convergente ou divergente.

Démonstration. — Il résulte de (XI, 1) pour $x_0 \leqq x' \leqq x''$

$$\int_{x'}^{x''} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x'}^{x''} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Psi(x')}^{\Psi(x'')} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\psi(x'')} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 3}$$

Donc, si (XI, 2) converge:

$$\int_{\Psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx < \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx\,;$$

de sorte qu'on a pour chaque $x' \geqq x_0$

$$\Psi(x') > \psi(x')\,.$$

Supposons d'autre part que (XI, 2) soit divergente. Alors nous allons démontrer qu'il est impossible que pour une suite x_ν avec $x_\nu > x_0\ (\nu > 0)$, $x_\nu \longrightarrow \infty$ on ait

$$\Psi(x_\nu) > \psi(x_\nu)\,. \tag{XI, 4}$$

Car on il résulterait de (XI, 4) d'après (XI, 1)

$$\int_{x_0}^{x_\nu} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x_0}^{x_\nu} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,dx\,,$$

donc, d'après (XI, 4):

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \left(\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx + \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx \right)\,,$$

et, puisque $0 < q < 1$,

$$(1-q) \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,, \quad \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq \frac{q}{1-q} \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

et l'intégrale (XI, 2) serait convergente puisque $\Psi(x_\nu)$ tend vers l'infini, C.Q.F.D.

β) *Supposons que dans les hypothèses de la proposition* α) *on ait pour* $x \geqq x_0$

$$x f(x) \leqq c\,, \quad \Psi(x) \geqq \gamma\, \psi(x) \quad (x \geqq x_0) \tag{XI, 5}$$

pour une constante positive c *et une constante positive* $\gamma \leqq 1$. *Alors l'intégrale* (XI, 2) *est convergente et l'on a*

$$\Psi(x) > \psi(x) \quad (x \geqq x_0)\,.$$

Démonstration. — On a pour $x \geqq x_0$ comme dans la démonstration de (XI, 3)

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 6}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Donc en introduisant ces expressions dans (XI, 6) et en résolvant l'inégalité obtenue par rapport à $\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx$:

$$(1-q)\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx - q\int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Ici on a pour la première intégrale de droite d'après (XI, 5):

$$\int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \leqq c\int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} \frac{dt}{t} = c\,lg\,\frac{1}{\gamma}\,.$$

Donc l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ reste bornée pour $x \longrightarrow \infty$ et (XI, 2) est convergente.

γ) *Remplaçons dans les hypothèses de la proposition* α) *l'inégalité* (XI, 1) *par*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0) \tag{XI, 7}$$

et supposons en plus que l'on ait pour un $x_1 \geqq x_0$ *convenablement choisi*

$$\Psi(x_1) > \psi(x_1)\,.$$

Alors l'intégrale (XI, 2) *est divergente.*

Démonstration. — On a pour $x > x_1 \geqq x_0$ d'après (XI, 7)

$$\int_{x_1}^{x} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(x_1)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{x_1}^{x} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(x_1)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,,$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx\,.$$

Mais alors l'intégrale de gauche serait pour tout $x > x_1$ supérieure à la constante positive

$$\int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx$$

et l'intégrale (XI, 2) ne pourrait converger d'après le critère de Bolzano-Cauchy.