

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1955)
Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF
Autor: Ostrowski, A.
Kapitel: X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Alors on a pour tout entier positif n :

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}.$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^{\varepsilon} e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x).$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$\lg \Psi'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x) - x], \quad \Psi'(x) \leq e^{\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]},$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que x^k ($k > 1$) soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k :

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x) (\lg \Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \quad \frac{\lg x}{\lg \lg \Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \quad (\text{X}, 1)$$

pour chaque $\delta > 0$, la fonction conjuguée x^k est subordonnée à $\Psi(x)$ pour chaque $k > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k) k x^{k-1}}{f(x)} \leq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f(x^{kn}) k^n x^{kn}}{x f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}. \quad (\text{X}, 2)$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{kn+1} > \Psi(x) \geq x^{kn}. \quad (\text{X}, 3)$$

On a alors, $\Psi(x)$ étant continue, pour un certain \bar{x}

$$\Psi(x) = \bar{x}^{k^n},$$

où évidemment

$$x \leq \bar{x} < x^k. \quad (\text{X}, 4)$$

En appliquant (X, 2) à \bar{x} , on aura donc

$$\frac{f(\Psi(x)) k^n \Psi(x)}{\bar{x} f(\bar{x})} \leq e^{-\varepsilon n},$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} \frac{f(\bar{x})}{f(x)} \bar{x} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} \frac{1}{k^n}. \quad (\text{X}, 5)$$

Or, \bar{x} étant $\geq x$ d'après (X, 4) on aura $f(\bar{x})/f(x) \leq 1$. D'autre part, il résulte de (X, 3)

$$k^{n+1} > \frac{\lg \Psi(x)}{\lg x}, \quad (\text{X}, 6)$$

donc

$$\frac{1}{k^n} < k \frac{\lg x}{\lg \Psi(x)}.$$

On obtient donc en introduisant cette borne dans l'expression de droite de (X, 5) et en remplaçant \bar{x} par sa borne supérieure x^k :

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \frac{\lg x}{\lg \Psi(x)} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}. \quad (\text{X}, 7)$$

On a à partir d'un x par hypothèse

$$\Psi'(x) \leq \Psi(x) (\lg \Psi(x))^{1+\delta},$$

avec

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \lg k}, \quad (\text{X}, 8)$$

donc, en vertu de (X, 7)

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \lg x (\lg \Psi(x))^\delta. \quad (\text{X}, 9)$$

D'autre part, on a d'après (X, 6)

$$n > \frac{\lg \frac{\lg \Psi(x)}{\lg x}}{\lg k} - 1,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon \left(\frac{\lg \Psi(x)}{\lg x} \right)^{-\frac{\varepsilon}{\lg k}}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon \left(\frac{\lg x}{\lg \Psi(x)} \right)^{2\delta}}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq k e^{\varepsilon} x^k \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{(\lg \Psi(x))^{\delta}}. \quad (\text{X, 10})$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x :

$$\delta \lg \lg \Psi(x) > (k+1) \lg x, \quad (\lg \Psi(x))^{\delta} > x^{k+1}.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leq k e^{\varepsilon} \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \rightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^x}, \quad \Psi(x) = e^{e^{e^x}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{(\lg x)^2}}.$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) Soient $\Psi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions positives, continues et dérivables pour $0 < x_0 \leq x < \infty$ et telles que l'on ait

$$\Psi(x) \rightarrow \infty, \quad \psi(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$