

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF  
**Autor:** Ostrowski, A.  
**Kapitel:** VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

que pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec  $\Psi(x) = x^k$  ( $k > 1$ ).

## VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{v+1}}{a_v} \leq \frac{c_{v+1}}{c_v} \quad (a_v, c_v > 0; \quad v = 1, 2, \dots),$$

la convergence de  $\Sigma c_v$  entraîne celle de  $\Sigma a_v$ , donc la divergence de  $\Sigma a_v$  entraîne la divergence de  $\Sigma c_v$ . On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente  $\Sigma c_v$ , ou la série divergente  $\Sigma a_v$ .

Or si les  $a_v$  et les  $c_v$  convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

*Si la convergence de la série de comparaison  $\Sigma c_v$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée  $\Psi(x)$ , le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de  $\Sigma a_v$ . Si la divergence de la série  $\Sigma a_v$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de  $\Sigma c_v$ .*

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction  $f(x)$  non nulle à partir d'un  $x$ , qu'elle possède la propriété E si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \quad (\text{VII, 1})$$

uniformément par rapport à  $\theta$  pour  $|\theta| \leq 1$ .

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

**Lemme.** — Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$ , dont l'une au moins jouit de la propriété E, tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété E. Soient  $\Psi(x)$ ,  $\Phi(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$  avec  $\Psi(x) \geq x + 1$ . Alors si l'on a pour tout entier  $v \geq n_0$ :

$$\frac{f(\nu + 1)}{f(\nu)} \leq \frac{g(\nu + 1)}{g(\nu)} \quad (\nu \geq n_0), \quad (\text{VII}, 2)$$

on a,  $x$  tendant vers l'infini,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Phi(x)}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(\Psi(x)) \Phi(x)}{g(x)}, \quad (\text{VII}, 3)$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Phi(x)}{f(x)} \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{g(\Psi(x)) \Phi(x)}{g(x)}. \quad (\text{VII}, 4)$$

*Démonstration.* — Observons d'abord que si l'on a pour deux fonctions  $A(x)$  et  $B(x)$ , positives pour  $x \geq x_0$ :

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{B(x)} \leq 1,$$

il en résulte

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} A(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} B(x),$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} A(x) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} B(x).$$

Donc les relations (VII, 3) et (VII, 4) résultent de la relation

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) g(x)}{g(\Psi(x)) f(x)} \leq 1, \quad (\text{VII}, 5)$$

que nous allons démontrer. Posons  $[x] = n$ ,  $[\Psi(x)] = N \geq n + 1$  où le symbole  $[x]$  désigne le plus grand entier contenu dans  $x$ .

Si  $f(x)$  et  $g(x)$  jouissent les deux de la propriété E, l'expression

$$\frac{f(\Psi(x)) g(x)}{f(x) g(\Psi(x))} \quad (\text{VII}, 6)$$

est équivalente avec  $\frac{f(N) g(n)}{g(N) f(n)}$  et cette dernière expression est  $\leq 1$ , en vertu de (VII, 2).

Si  $f(x)$  est non croissante et  $g(x)$  jouit de la propriété E, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\Psi(x)) g(n + 1)}{f(x) g(N)} \leq \frac{f(N) g(n + 1)}{f(n + 1) g(N)} \leq 1,$$

en vertu de (VII, 2).

Si enfin  $f(x)$  jouit de la propriété E et  $g(x)$  est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(N+1)g(x)}{f(n)g(\Psi(x))} \leq \frac{f(N+1)g(n)}{f(n)g(N+1)} \leq 1.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant  $\Psi(x)$  une fonction conjuguée satisfaisant à la condition  $\Psi(x) \geq x+1$ . En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré  $\Phi(x)$  par  $\Psi'(x)$  on voit que si la convergence de la série  $\Sigma g(v)$  se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à  $\Psi(x)$  il en est de même pour la série  $\Sigma f(v)$ . De même, si la divergence de la série  $\Sigma f(v)$  se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à  $\Psi(x)$ , il en est de même pour  $\Sigma g(v)$ .

Posons en particulier  $\Psi(x) = e^x$ . Alors les fonctions

$$L_n(x) l g_n^{1+s} x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critère B d'Ermakoff (avec  $\Psi(x) = e^x$ ) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les  $a_v$  entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte :

*Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour  $\Psi(x) = e^x$  s'il s'agit d'une série  $\Sigma a_v$  à termes non croissants ou bien si l'on a  $\frac{a_{v+1}}{a_v} \longrightarrow 1$ .*

### VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée  $\Psi(x)$ . A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient  $\frac{f(\Psi(x))\Psi'(x)}{f(x)}$  tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi  $\infty$ .